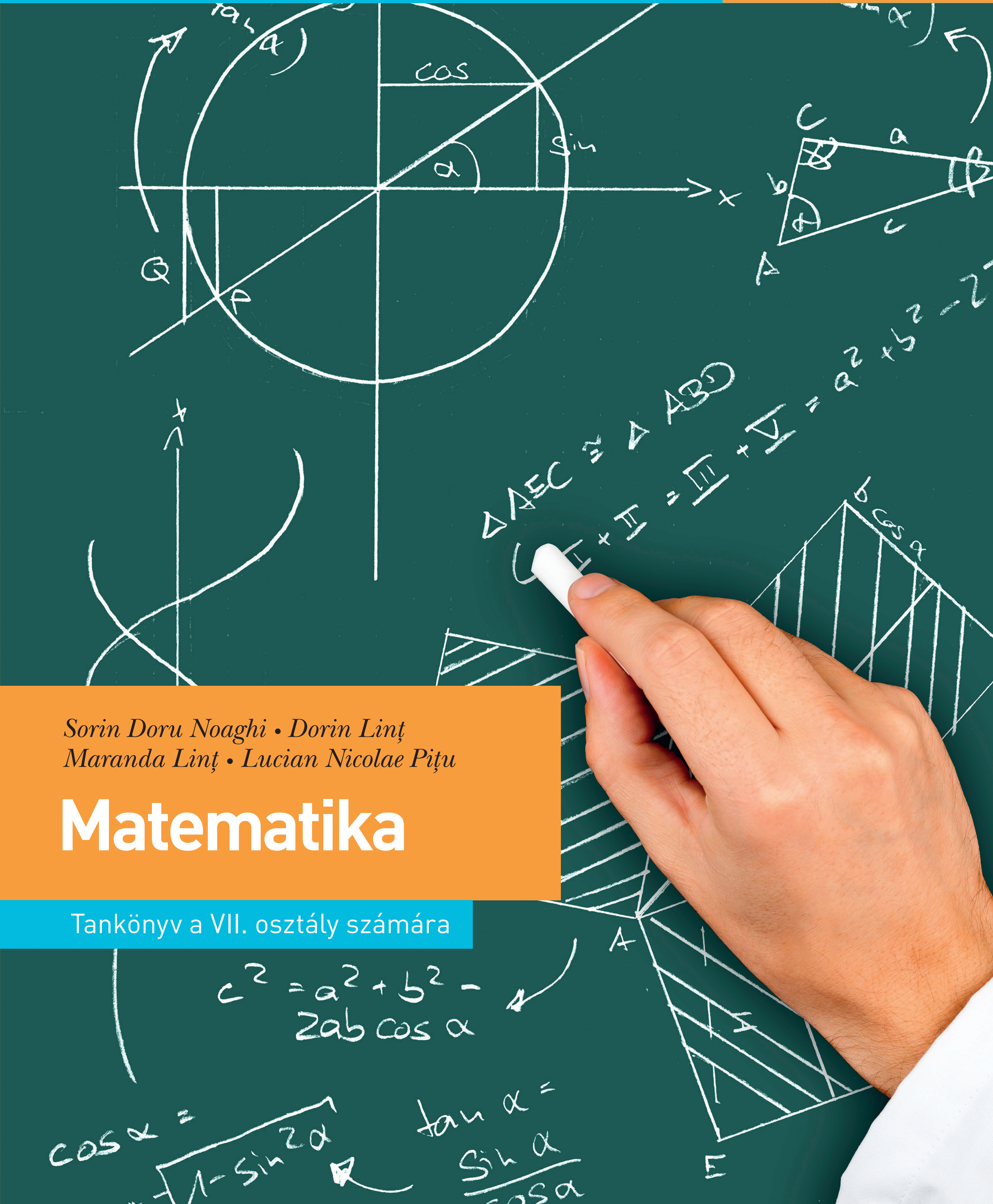
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA



Sorin Doru Noaghi • Dorin Linț
Maranda Linț • Lucian Nicolae Pițu

Matematika

Tankönyv a VII. osztály számára

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară
aprobată prin OM nr. 3393 din 28.02.2017.

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Sorin Doru Noaghi • Dorin Linț
Maranda Linț • Lucian Nicolae Pițu

Matematika

Tankönyv a VII. osztály számára

Manualul școlar a fost aprobat prin ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5219/12.11.2019

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2019–2020.

Inspectoratul școlar ....

Școala/Colegiul/Liceul ....

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* *Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*
- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Matematică. Manual pentru clasa a VII-a
Sorin Doru Noaghi, Dorin Linț, Maranda Linț, Lucian Nicolae Pițu

Referenți științifici: lect. univ. dr. Marius-Nicolae Heljiu, Departamentul de Matematică-Informatică, Facultatea de Științe, Universitatea din Petroșani
prof. dr. Dan-Ștefan Marinescu, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara", Hunedoara

Traducere în limba maghiară:
Traducători manual tipărit: Bálint Attila Sándor, capitolele 1 și 2; Dáné Károly, capitolele 3 și 5; Hamar Erzsébet, capitolul 7; Szász Szilárd, capitolul 4; Tóth Csongor, capitolul 6.
Corector: Dézsi Eleonóra
Traducători digital (AMII): Kásler Enikő Ildikó, Kovács Erzsébet, Kocsis Attila Levente

LITERA®
Editura Litera
O.P. 53; C.P. 212, sector 4, București, România
tel.: 021 319 63 90; 031 425 16 19; 0752 548 372
e-mail: comenzi@litera.ro

Ne puteți vizita pe
www.litera.ro

Editor: Vidrașcu și fiii
Redactori: Gabriela Niță, Carmen Birta
Corector: Sabrina Florescu
Credite foto: Dreamstime, Shutterstock
Copertă: Vlad Panfilov
Tehnoredactare și prepress: Banu Gheorghe

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematika : ankönyv a VII. osztály számára / Sorin Doru Noaghi, Dorin Linț, Maranda Linț, Lucian Nicolae Pițu. – București: Litera, 2020

ISBN 978-606-33-4736-8

I. Noaghi, Sorin Doru
II. Linț, Dorin
III. Linț, Maranda
IV. Pițu, Lucian Nicolae

51

TARTALOMJEGYZÉK

Ismétlő feladatok 7

1. Valós számok halmaza 11

1.1. Természetes számok négyzetének négyzetgyöke.
Egy pozitív racionális szám négyzetgyökének közelítése 12
1.ℓ. Természetes számok négyzetének négyzetgyöke 15
2.ℓ. Racionális számok négyzetének négyzetgyöke 15
3.ℓ. Pozitív racionális szám négyzetgyökének becslése 18
1.2. Irracionális számok, példák
A valós számok halmaza, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bennfoglalás 23
1.ℓ. Irracionális számok 23
2.ℓ. A valós számok halmaza, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bennfoglalás 26
1.3. Tényezők kiemelése a gyökjel alól.
Tényezők bevitele gyökjel alá 28
1.4. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítés segítségével.
A számok összehasonlítása és rendezése.
Valós szám abszolút értéke 32
1.ℓ. Valós számok tizedes törtek alakjában való közelítése. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítés segítségével 32
2.ℓ. Valós számok összehasonlítása és rendezése 36
3.ℓ. Valós szám modulusa (abszolút értéke) 39
1.5. Műveletek valós számokkal.
Az $a\sqrt{b}$ alakú nevezők gyöktelenítése 43
1.ℓ. Valós számok összeadása, kivonása, szorzása és osztása 43
2.ℓ. Valós számok hatványozása 49
3.ℓ. Az $a\sqrt{b}$ alakú nevező gyöktelenítése 51
4.ℓ. Műveletek elvégzésének sorrendje 53
1.6. n valós szám súlyozott számtani közepe, $n \geq 2$.
Két pozitív valós szám mértani közepe 58
1.ℓ. n valós szám súlyozott számtani közepe, $n \geq 2$. 58
2.ℓ. Két pozitív valós szám mértani közepe 60
1.7. $x^2 = a$ alakú egyenletek, ahol $a \in \mathbb{R}$ 65

2. Lineáris egyenletek és egyenletrendszerek 69

2.1. Egyenlőség átalakítása ekvivalens egyenlőséggé. Azonosságok 70
2.2. $a \cdot x + b = 0$ alakú egyenletek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.
Egyenlet megoldáshalmaza. Ekvivalens egyenletek 73
2.3. Két kétismeretlenes lineáris egyenletből álló egyenletrendszer.
A helyettesítés és/vagy a kiküszöbölés módszere 78
1.ℓ. Két kétismeretlenes lineáris egyenletből álló egyenletrendszer. 78
2.ℓ. A helyettesítés és a kiküszöbölés módszere 81
2.4. Egyenletekkel vagy lineáris egyenletrendszerekkel megoldható feladatok 85

3. Az adatszervezés elemei 89

3.1. Két halmaz Descartes-féle szorzata.
Derékszögű koordináta-rendszer 90
1.ℓ. Két halmaz Descartes-féle szorzata 90
2.ℓ. A derékszögű koordináta-rendszer 93
3.2. Függvényi kapcsolat 96

4. A négyszög 101

4.1. A konvex négyszög.
Egy konvex négyszög szögei mértékének összege 102
4.2. A paralelogramma tulajdonságai.
Alkalmazások a háromszögek geometriájában 105
1.ℓ. A paralelogramma. Tulajdonságok 105
2.ℓ. A paralelogramma alkalmazása a háromszögek geometriájában 110
4.3. Sajátos paralelogrammák: téglalap, rombusz, négyzet 115
1.ℓ. A téglalap. Tulajdonságok 115
2.ℓ. Rombusz. Tulajdonságok 118
3.ℓ. Négyzet. Tulajdonságok 120
4.4. A trapéz: osztályozás, tulajdonságok. A trapéz középvonala 125
4.5. Kerületek és területek 131

5. A kör 137

5.1. Kerületi szög. Külső pontból húzott érintők 138
1.ℓ. Körív és húr 138
2.ℓ. Kerületi szög 142
3.ℓ. Külső pontból húzott érintő 146
5.2. Körbe írt szabályos sokszögek 150
5.3. A kör kerülete és a körlap területe 154

6. Háromszögek hasonlósága 159

6.1. Arányos szakaszok. Az egyenlő közű párhuzamosok tétele 160
1.ℓ. Arányos szakaszok 160
2.ℓ. Az egyenlő közű párhuzamosok tétele 163
6.2. Thalész tétele. Thalész tételének fordított tétele
Szakasz felosztása arányos részekre 165
1.ℓ. Thalész tétele 165
2.ℓ. Thalész tételének fordított tétele 168
3.ℓ. Szakasz felosztása arányos részekre 171
6.3. Hasonló háromszögek. A hasonlóság alaptétele. A háromszögek hasonlósági esetei 173
1.ℓ. Hasonló háromszögek. A hasonlóság alaptétele 173
2.ℓ. A háromszögek hasonlósági esetei 178
3.ℓ. A háromszögek hasonlóságának gyakorlati alkalmazása 183

7. Metrikus összefüggések a derékszögű háromszögben 189

7.1. Merőleges vetületek egy egyenesre.
A magasságtétel. A befogótétel 190
1.ℓ. Merőleges vetületek egy egyenesre 190
2.ℓ. A magasságtétel 193
3.ℓ. A befogótétel 197
7.2. A Pitagorasz-tétel. Pitagorasz tételének fordított tétele 201
7.3. A trigonometria elemei a derékszögű háromszögben 206
7.4. A derékszögű háromszög megoldása. Alkalmazások 211
1.ℓ. A derékszögű háromszög megoldása 211
2.ℓ. A derékszögű háromszög alkalmazása a szabályos sokszög elemeinek kiszámítására más gyakorlati helyzetekben 213
Összefoglaló feladatok 219
Év végi felmérők és megoldások 221

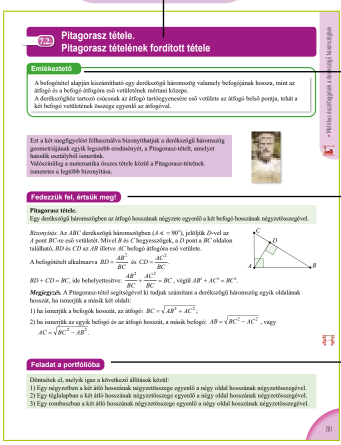
A tankönyv felépítése

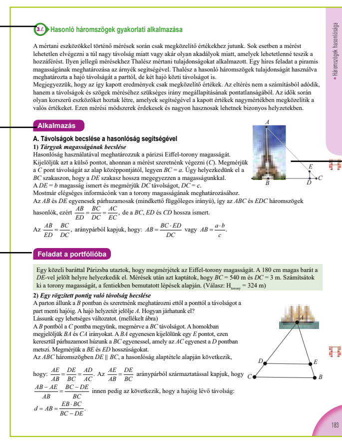
Nyomtatott változat

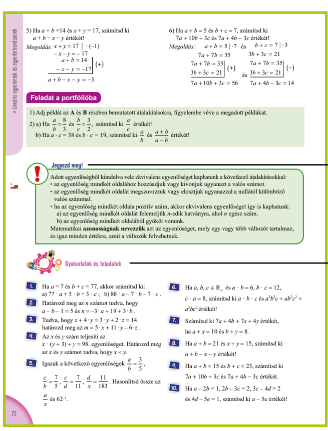
A VII. *osztályos Matematika* tankönyv hét fejezetet tartalmaz, 28 tanítási egységet, amelyek megfelelnek a tantervben foglalt témaköröknek és tartalmaknak. A leckéket olyan gyakorlati, interaktív tanulási-értékelési tevékenységek egészítik ki, amelyek elősegítik a leckékkel összefüggésben álló sajátos kompetenciák kialakítását. A tanítási egységek 1-3 óra alatt feldolgozható leckékre vannak felosztva.

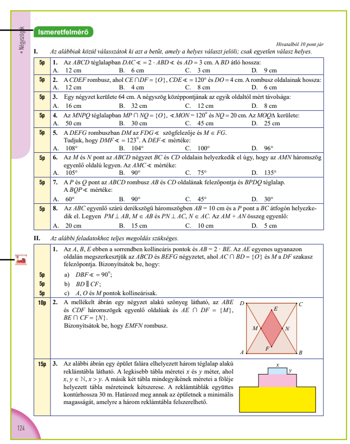
A tanítási egység bemutatása

A tankönyv oldalai









Címszavakról

Emlékeztető	Előző leckékben elsajátított fogalmak és ismeretek, melynek célja, hogy logikus kapcsolatokat teremtsünk az új lecke tartalmával.
Oldjuk meg figyelmesen!	Felfedezésen alapuló mintafeladatok és gyakorlatok; új ismeretek felismerése vagy következtetése.
Felfedezzük fel, értsük meg!	A tantervben foglalt tartalmak, példák, magyarázatok, megoldási módszerek.
Alkalmazás	Megoldott példák; a lecke fogalmai közötti kapcsolatot bemutató fontosabb matematikai eredmények; ismétlés; hétköznapi alkalmazás.
Gyakorlati alkalmazás:	Feladatok megoldása egyéni vagy csoporttevékenységek alkalmával.
Feladat a portfólióba	Olyan egyéni vagy csoporttevékenységek, amelyek során a tankönyvi modellben leírt lépéseket követjük.
Jegyezd meg	Új ismeretek, megjegyzések összesítése; néhány alapvető ötlet ismétlése, vázlatok bemutatása, ábrák.
Ne kapkodj!	Figyelmeztetés tulajdonságok helytelen használatára, tévedési lehetőségekre.
Gyakorlatok és feladatok	Fokozatos nehézségi szintű, illetve a tanegység tartalmát követő tevékenységek.
Ismeretfelmérő	Objektív, félobjektív, szubjektív itemek.

Digitális verzió

A digitális változat tartalmazza a tankönyv teljes tartalmát is, de új interaktív feladatokat is, oktató játékokat, animációkat, filmeket és szimulációkat. Mindezek célkitűzése kognitív értéktöbblet hozzáadása. A tankönyv oldalai számítógépen, laptopon, táblagépen, telefonon megtekinthetők és tökéletes navigálási tapasztalatot nyújtanak. A digitális változaton navigálva át lehet lapozni a tankönyvet és vissza lehet térni az előző tanulási tevékenységhez. Az iskolai tankönyv elektronikus változatának tartalma hasonló a nyomtatott változatához, többletként egy sor interaktív multimédiás tanulási tevékenységet tartalmaz: statikust, animációt, interaktívat.

Statikus AMII	Rajzokat, fényképeket, statikus diagramokat, statikus térképeket foglal magába.
Animációs AMII	Animációkat vagy filmeket foglal magába.
Interaktív AMII	Magas fokú interaktív oktatói elemeket foglal magába (folyamatok szimulációi, problémamegoldás, kísérlet és felfedezés, oktató játékok), melyek segítségével a tanuló többlettudást szerezhet.

Alap- és sajátos kompetenciák a 3393/28.02.2017-as miniszteri rendelet alapján

1. Adatok, mennyiségek és matematikai relációk felismerése adott környezetben

- **1.1.** $\mathbb{R}$ adott részhalmazában található számok meghatározása
- **1.2.** Lineáris egyenlet vagy egyenletrendszer segítségével megoldható feladatok felismerése
- **1.3.** Információk kikeresése táblázatokból, grafikonokból és diagramokból
- **1.4.** Sajátos négyszögek felismerése adott mértani alakzatokban
- **1.5.** Kör és/vagy szabályos sokszög elemeinek felismerése adott mértani alakzatokban
- **1.6.** Hasonló háromszögek felismerése adott mértani alakzatokban
- **1.7.** Egy derékszögű háromszög elemeinek felismerése adott mértani alakzatban

2. Mennyiségi, minőségi, strukturális matematikai adatok feldolgozása változatos tájékoztatási forrásokból

- **2.1.** A számítási szabályok alkalmazása valós szám becslésére és közelítő értékének kiszámítására
- **2.2.** A számítási szabályok használata lineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldásának ellenőrzésére
- **2.3.** Adatfeldolgozás táblázat, grafikon vagy diagram formájában rögzítés és bemutatás céljából
- **2.4.** Négyszögek leírása értelmezés és tulajdonságok felhasználása adott mértani konfigurációban
- **2.5.** A kör és a körbe írt szabályos sokszögek tulajdonságainak leírása.
- **2.6.** Háromszögek hasonlósági relációjának megállapítása
- **2.7.** Egy derékszögű háromszögben érvényes metrikus összefüggések alkalmazása a háromszög elemei meghatározásának céljából

3. Fogalmak és sajátos algoritmusok használata változatos matematikai összefüggésekben

- **3.1.** Algoritmusok és a műveletek tulajdonságainak használata valós számokkal végzett számítások során
- **3.2.** Ekvivalens transzformációk használata lineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldása során
- **3.3.** Megfelelő módszerek kiválasztása olyan feladatban, amelyekben függvényi kapcsolatok és azok ábrázolása szerepel
- **3.4.** A négyszögek tulajdonságainak alkalmazása feladatok megoldásában
- **3.5.** A kör tulajdonságainak alkalmazása feladatok megoldásában
- **3.6.** Háromszögek hasonlóságának alkalmazása adott mértani alakzatokban, hosszúságok, mértékek és területek meghatározására.
- **3.7.** Metrikus összefüggések bizonyítása derékszögű háromszögben

4. Adott helyzetre vonatkozó információk, következtetések, megoldási eljárások kifejezése sajátos matematikai nyelvezeten

- **4.1.** A valós szám fogalmára vonatkozó terminológia használata (előjel, abszolút érték, modulus, ellentett, inverz)
- **4.2.** Lineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldásának leírása
- **4.3.** Az adatszervezés egyes elemeinek kifejezése sajátos matematikai nyelvezeten
- **4.4.** A négyszögekkel kapcsolatos fogalmak kifejezése geometriai nyelvezeten
- **4.5.** A kör és a szabályos sokszögek tulajdonságainak leírása kifejezése sajátos matematikai nyelvezeten
- **4.6.** Egyes alakzatok tulajdonságainak kifejezése a hasonlóság segítségével, matematikai nyelvezeten
- **4.7.** Egy derékszögű háromszög elemei közt fennálló relációk kifejezése matematikai nyelvezeten

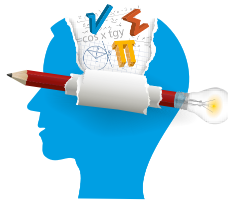
5. Adott helyzet matematikai jellemzőinek elemzése

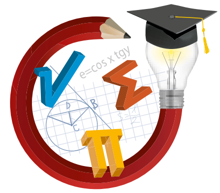
- **5.1.** Valós számokra vonatkozó feladatok megoldási stratégiájának kidolgozása
- **5.2.** Módszerek megállapítása lineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldására
- **5.3.** Gyakorlati helyzetek elemzése adatszervezés révén
- **5.4.** Megfelelő geometriai ábrázolás választása szakaszok hosszának, szögek mértékének és felületek területének kiszámítására
- **5.5.** A kör és a szabályos sokszögek bizonyos tulajdonságainak magyarázata mértani ábrázolás alapján
- **5.6.** A háromszögek hasonlóságának értelmezése geometriai alakzatokban
- **5.7.** Egy derékszögű háromszög elemei között fennálló metrikus összefüggések magyarázata

6. Adott helyzet matematikai modellezése különböző területek ismeretanyagának beépítésével

- **6.1.** Valós számokkal végzett műveleteket maga után vonó gyakorlati helyzet matematikai modellezése
- **6.2.** Adott helyzet átültetése a matematikába, lineáris egyenletek és/vagy egyenletrendszerek segítségével
- **6.3.** Adott helyzet átültetése megfelelő ábrázolás segítségével (szöveg, képlet, grafikon)
- **6.4.** Adott helyzet modellezése négyszögekre vonatkozó geometriai ábrázolással
- **6.5.** Szabályos sokszögekkel vagy körrel kapcsolatos gyakorlati helyzetek matematikai modellezése
- **6.6.** Adott helyzet megoldását célzó stratégia végrehajtása, háromszögek hasonlóságának alkalmazásával
- **6.7.** Adott helyzet megoldását célzó stratégia végrehajtása, derékszögű háromszögben érvényes metrikus összefüggések alkalmazásával

Ismétlő feladatok





1. Adott az $A=\left\{-\frac{8}{4}, \frac{-3}{-0{,}5}, \frac{78}{-13}, \frac{7}{4}, 6^2:3^2, (-3)^0\right\}$ halmaz. Határozd meg az $A\cap\mathbb{N}, A\cap\mathbb{Z}, A\setminus\mathbb{Z}$ halmazokat.

2. Számítsd ki a $-\frac{23}{6}$ és $\frac{63}{22}$ számok közötti egész számok összegét!

3. Írd a kijelentések mellé az I szimbólumot, abban az esetben, ha igaz, illetve a H jelet, ha a kijelentés hamis!
a) Az $a = 7 - 13 + 18 - 10 + 9$ természetes szám.
b) A $b = (-2)^3 + (-3)^2 + (-3 + 2)\cdot(-3 - 2)$ negatív egész szám.
c) A $c=-\frac{1}{4}+\left(0{,}5-\frac{5}{2}+0{,}2\right):\left(-4+\frac{2}{5}\right)$ racionális, de nem egész szám.

4. Egy osztály tanulói valamely felmérőn a következő jegyeket kapták: három 6-os, négy 7-es, öt 8-as, hat 9-es, illetve hét 10-es jegyet. Számítsd ki az osztálynak ezen a felmérőn szerzett átlagát!

5. Adottak az $x = 2{,}7$; $y=1\frac{1}{2}$ és $z=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ számok. Számítsd ki: $z\cdot(x-y^2)$.

6. Mutasd ki, hogy az $n=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{4}{3}-\left(0{,}(3)\right)^2\right]:4\frac{8}{9}$ természetes szám.

7. a) Határozd meg azokat az x egész számokat, melyekre igaz $|x + 3| = 7$.
b) Határozd meg azokat az y egész számokat, melyekre igaz $|3y - 2| \le 4$.

8. Válaszd ki a helyes választ! Az alábbi feladatokban csak egy válasz helyes.
8.1. A 10 és 15 szám legnagyobb közös osztója:
A. 25; B. 30; C. 5; D. 10.
8.2. A 10 és 15 szám legkisebb közös többszöröse:
A. 100; B. 50; C. 30; D. 5.
8.3. Ha a egy természetes szám és $\frac{a+7}{a+2}$ egész szám, akkor az a értéke:
A. 3; B. 0; C. 1; D. – 1.
8.4. Miután egy sportoló megtette az út 30%-át, észrevette, hogy még hátravan 8,4 km. Az út hossza:
A. 10 km; B. 12 km; C. 84 km; D. 42 km.

9. Az $a = -2 - (-4)$ és $b = -3 + (-3)^2 - (-2)\cdot(-4)$, számok esetén számold ki az $\frac{a-3\cdot b}{3\cdot a+b}$ arány értékét.

10. Határozd meg az x és y racionális számokat tudva, hogy összegük 67, valamint $(x - 10)$ és y arányának értéke 0,5.

11. Használva az $S = \{27, 64, 102, 1234, 5532, 10010, 10^5\}$, halmaz elemeit, határozd meg az $A = \{x \in S \mid x \,\vdots\, 2\}$, $B = \{x \in S \mid x \,\vdots\, 3\}$, $C = \{x \in S \mid x \,\vdots\, 4 \text{ és } x \not\vdots\, 8\}$ részhalmazokat.

12. Mutasd ki, hogy:
a) a $2^{n+3} + 2^n$ szám osztható 9-cel, bármely n természetes szám esetén.
b) a $4 \cdot m + 8^m$ szám 4-nek többszöröse, bármely m nullától különböző természetes szám esetén.
c) 3 nem osztja a $2^p + 6^p$ számot, bármely p természetes szám esetén sem.

13. Vizsgáld meg, hogy az $a = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) : \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right)$ szám pozitív, negatív vagy nulla.

14. Határozd meg:
a) az x természetes számot az $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$ aránypárból.
b) az y egész számot a $\frac{3}{y} = \frac{y}{27}$ aránypárból.

15. Határozd meg az a, b és c, számokat, tudva, hogy egyenesen arányosak a 2, $\frac{5}{2}$ és 3 számmal, valamint számtani közepük 25.

16. Az a, b és c racionális számok teljesítik a $3 \cdot a + 4 \cdot b = c - 36$ egyenlőséget. Határozd meg ezt a három számot, ha a és b egyenesen arányos 4-gyel és 3-mal számokkal, valamint b és c fordítottan arányos 0,24-gyel és 0,01-gyel.

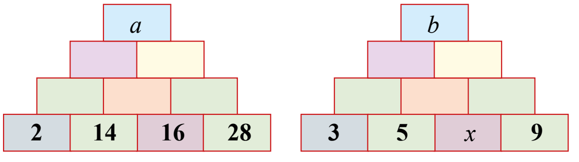
17. Oldd meg a következő egyenleteket:
a) $1{,}3 \cdot x + 2{,}73 = 2 \cdot (1{,}2 \cdot x - 1)$;
b) $\frac{x}{2} + \frac{4}{9} = \frac{x+7}{6}$;
c) $\frac{5 \cdot x - 1}{10} = \frac{2 \cdot x - 3}{6} + \frac{1}{3}$.

18. Egy csoport gyerek úgy döntött, hogy a csoport egyharmada részt vesz egy síversenyen, a többi 14 pedig csak szurkol nekik. Határozd meg a csoportban levő gyerekek számát.

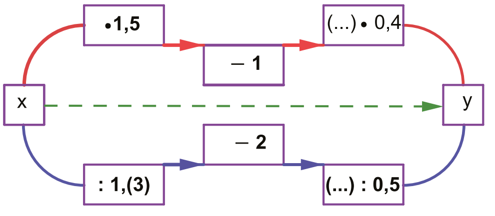
19. Dávid ajándékot vásárolt barátainak, Andrásnak, Károlynak és Vencelnek. András ajándéka pénzének $\frac{2}{5}$ ébe, Károly ajándéka 8 lejjel kevesebbe, Vencel ajándéka pedig 31 lejbe került. Tudva, hogy az ajándékok megvásárlása után Dávidnak még 13 leje maradt, számítsd ki az ajándékokra elköltött összegeket!

20. Egy építkezési anyagraktárból 22 tonna cementet adtak el, azaz a raktárban levő cementmennyiség $\frac{5}{8}$-át, második nap pedig a megmaradt mennyiség $\frac{3}{4}$ -ét. Határozd meg a két eladás után a raktárban maradt cement mennyiségét.

21. Másold a füzetbe a mellékelt táblázatokat, majd töltsd ki betartva a következő szabályt: egy sorban levő két szomszédos cella számtani közepét írd a fölöttük levő cellába.
Határozd meg az x értékét, tudva, hogy az összes cella kitöltése után az a és b szám egyenlő lesz.



22. Elindulva az x számból, elvégezve az ábrán feltüntetett műveleteket a jobb oldali cellában található számot kapjuk, bármely útvonalon is haladjunk. Határozd meg az x és y számokat!



23. Az AD szakaszon adott B és C pont esetén $AB = 4$ cm, $AC = 12$ cm, $AD = 20$ cm. Mutasd ki, hogy a C pont a BD szakasz felezőpontja.

24. Adottak az O, A, B, C kollineáris pontok ebben a sorrendben. Az OA, AB és BC szakaszok hossza egymásutáni páros természetes számok, cm-ben kifejezve. Az M pont az AC szakasz felezőpontja és $OM = 11$ cm. Számítsd ki:
a) az OC szakasz hosszát;
b) az OB szakasz N felezőpontja és az M pont közötti távolságot.

25. Az $AOB\sphericalangle$ és $COD\sphericalangle$ csúcsszögek, $O \in AC$, valamint $PO \perp BD$, $P \in$ Int $AOD\sphericalangle$.
Ha $COP\sphericalangle = 133°$, határozd meg az $AOB\sphericalangle$ és $BOC\sphericalangle$.

26. Az $AOB\sphericalangle$, $BOC\sphericalangle$, $COD\sphericalangle$ és $DOA\sphericalangle$ O pont körüli szögek, $AOB\sphericalangle = 80°$, $BOC\sphericalangle = 140°$ és $CO \perp OD$.
a) Számítsd ki az $AOC\sphericalangle$ és $AOD\sphericalangle$ szögek mértékét;
b) Bizonyítsd be, hogy az OC félegyenessel ellentétes félegyenes az $AOB\sphericalangle$ szög szögfelezője!

27. Az ABC háromszög oldalai teljesítik a következő relációkat: $AB+\dfrac{BC}{2}=BC+\dfrac{AC}{2}=AC+\dfrac{AB}{2}=12$ cm.
Egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjunk:
a) $AB = \ldots$ cm;
b) $\mathcal{K}_{ABC\Delta} = \ldots$ cm;
c) $BAC\sphericalangle = \ldots°$;
d) $ABC\sphericalangle = \ldots°$.

28. Az $xOy\sphericalangle$ mértéke 120° és $A \in Ox$, $B \in Oy$ úgy, hogy $AO = BO$. Az AO és BO felezőmerőlegesei C pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy:
a) $AOC\Delta \equiv BOC\Delta$; b) $ABC\Delta$ egyenlő szárú; c) $AC \parallel OB$.

29. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90°$ és $AB = AC$. Az A és C külső szögek szögfelezői D pontban metszik egymást. Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét.
a) $AD \parallel BC$;
b) $ADC\sphericalangle = 100°$;
c) $ADC\Delta$ egyenlő szárú;
d) $ABD\sphericalangle \equiv CBD\sphericalangle$;
e) $ADB\sphericalangle = 110°\ 30'$.

30. Az ABC derékszögű háromszögben $AB = AC = 10$ cm, $A\sphericalangle = 120°$, AD a $BAC\sphericalangle$ szög szögfelezője, $D \in BC$, M pont pedig az AB szakasz felezőpontja. Egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjunk:
a) $ABC\sphericalangle = \ldots°$;
b) $ADB\sphericalangle = \ldots°$;
c) $BMD\sphericalangle = \ldots°$;
d) $AD = \ldots$ cm;
e) $DM = \ldots$ cm;
f) $d(M, BD)$.

31. Az AB szakasz a $\mathcal{C}(O, r)$ kör átmérője. A kör C és D pontja az AB egyenes különböző oldalán helyezkedik el úgy, hogy $BAD\sphericalangle = BOC\sphericalangle = 45°$. Bizonyítsd be, hogy $OC \perp AD$!

32. Az $DEF\Delta$ háromszögben $DE = 7$ cm, $DF = 24$ cm és $EF = 25$ cm.
a) Mutasd ki, hogy a háromszög derékszögű!
b) Ha DL a háromszög oldalfelezője, számítsd ki a $LED\Delta$ kerületét.

33. Adott a $ABC\sphericalangle$ tulajdonképpeni szög. Az A ponton keresztül BC egyeneshez húzott párhuzamos egyenes a szög szögfelezőjét D pontban metszi.
a) Bizonyítsd be, hogy $AB \equiv AD$.
b) Ha $BC \equiv DC$, bizonyítsd be, hogy $AC \perp BD$.

34. A BC egyenes két különböző oldalán megszerkesztjük az ABC és DBC egyenlő szárú háromszögeketa. BE az ABC háromszög oldalfelezője, $E \in AC$, BF pedig a BCD háromszög magassága, $F \in CD$.
a) Igazold, hogy BEF háromszög egyenlő oldalú.
b) Számítsd ki $\dfrac{BP}{CP}$ arány értékét, ahol P a BC és EF egyenesek metszéspontja.

35. Az AB szakasz felezőmerőlegesén felvesszük a C és D pontot, melyek különböznek az AB szakasz felezőpontjától.
a) Bizonyítsd be, hogy $ACD\Delta \equiv BCD\Delta$.
b) Tudva, hogy $CDB\sphericalangle = 38°$, számítsd ki az ADB szög mértékét.

36. Az ABC és DBC derékszögű háromszögek, $A\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$ és E a BC szakasz felezőpontja.
a) Bizonyítsd be, hogy az AED háromszög egyenlő szárú, tudva hogy A, E, D pontok nem kollineárisak.
b) Ha $AD \perp BC$, mutasd ki, hogy $ABC\Delta \equiv DBC\Delta$.

37. Felvesszük az MNP háromszög MA oldalfelezőjén azt a B pontot, melyre $AB = 3$ cm, $BM = 6$ cm.
a) Ha $NB \cap MP = \{C\}$, mutasd ki, hogy $CM \equiv CP$;
b) Ha $PB \cap MN = \{D\}$, mutasd ki, hogy $PD = 3 \cdot BD$.

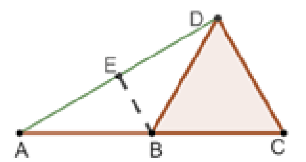
38. Az AB és CD kongruens szakaszok E pontban metszik egymást, E, $AE = 3$ cm, $AB = 6$ cm, $CE = \dfrac{1}{2} \cdot CD$.
Bizonyítsd be, hogy:
a) $AED\Delta \equiv CEB\Delta$;
b) $AC \parallel BD$.

39. Az A, B, C kollineáris pontok ebben a sorrendben. Az AB egyenes ugyanazon oldalán felvesszük a D és E pontot, amelyre $DA \perp BC$, $DA \equiv BC$ és $EC \perp AB$, $EC \equiv AB$.
a) Mutasd ki, hogy $ABD\Delta \equiv CEB\Delta$.
b) Számítsd ki a $BDE\Delta$ szögeinek mértékét.
c) Bizonyítsd be, hogy ha $BF \perp DE$, akkor $FD \equiv FE$.

40. Szerkesszünk olyan DEF háromszöget, melyben a DM oldalfelező hossza egyenlő az EF szakasz fél hosszával, valamint $DEF\sphericalangle = 60°$.

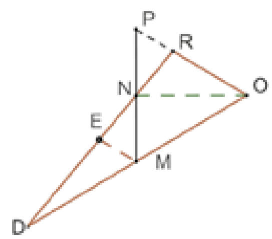
41. Legyenek M és N az ABC egyenlő oldalú háromszög AB és AC oldalainak felezőpontjai, illetve P az M pontnak BC egyenes szerinti szimmetrikusa. Bizonyítsd be, hogy a BC szakasz felezőpontja eleme az NP egyenesnek.

42. A mellékelt ábrán A, B, C, D, E turisztikai célpontokat jelölnek, a szakaszok pedig utak. Tudjuk, hogy az A, B, C pontok kollineárisak, és $BC = CD = DB =$ $= 800$ m. Az ABD háromszög egyenlő szárú, a E pont pedig az AD szakasz felezőpontja.



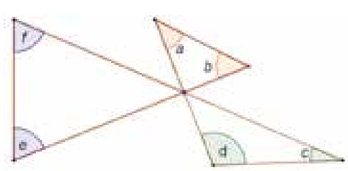
a) Bizonyítsd be, hogy $BE \parallel CD$.
b) Határozd meg a CAD szög mértékét.
c) Számítsd ki az A–B–C–D–B–E útvonal hosszát.

43. Dóra, Ottó és Róbert olyan játékban vesznek részt, melyben különböző útvonalakon haladnak. A mellékelt ábra szakaszai ezeket az útvonalakat ábrázolják. Tudjuk, hogy ON a $DOR\sphericalangle$,szögfelezője, az ON szakasz N pontjában emelt merőleges az OR egyenest P pontban, és a DO szakaszt az M felezőpontjában metszi. $ME \parallel OR$, $E \in DR$. A játék elején, a gyerekek a D, O, R pontban helyezkednek el, és a sorrendet betartva az O, P illetve E pontba haladnak.



a) Mutasd ki, hogy Dóra kétszer hosszabb távolságot tesz meg, mint Ottó.
b) Mutasd ki, hogy Róbert az R – D útvonal felét tette meg.

44. Számítsd ki az alábbi rajzon a, b, c, d, e, f szimbólumokkal jelölt szögek mértékének összegét.



1 Valós számok halmaza

1.1. Természetes számok négyzetének négyzetgyöke. Pozitív racionális szám négyzetgyökének közelítése
1.2. Irracionális számok. A valós számok halmaza
1.3. Tényezők kiemelése a gyökjel alól. Tényezők bevitele gyökjel alá
1.4. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítés segítségével. Valós számok összehasonlítása és rendezése. Valós szám modulusa
1.5. Műveletek valós számokkal. Törtek $a\sqrt{b}$ alakú nevezőjének gyöktelenítése.
1.6. n valós szám súlyozott számtani közepe, $n \geq 2$. Két pozitív valós szám mértani közepe.
1.7. $x^2 = a$ alakú egyenletek, ahol a valós szám.

Sajátos kompetenciák:

1.1. 2.1. 3.1. 4.1. 5.1. 6.1.

1.1. Természetes számok négyzetének négyzetgyöke. Egy pozitív racionális szám négyzetgyökének közelítése

1.l. Természetes számok négyzetének négyzetgyöke

Emlékeztető

Számhalmazok

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,....\}$ a természetes számok halmaza;

$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ az egész számok halmaza;

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},\,b\neq 0\right\}$ a racionális számok halmaza.

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$$

Hatványokra vonatkozó számítási szabályok

Ha $a,b\in\mathbb{Q}^*$, valamint $n,\,p\in\mathbb{Z}$ akkor:

$$a^n\cdot a^p=a^{n+p}$$

$$\left(a^n\right)^p=a^{n\cdot p}$$

$$a^n:a^p=a^{n-p}$$

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$$

$$a^n:b^n=(a:b)^n$$

Négyzetszámok

Az $x\in\mathbb{N}$ számot **négyzetszámnak** nevezzük, ha létezik olyan $n\in\mathbb{N}$ szám, melyre igaz hogy $x=n^2$.

Példák

$7\in\mathbb{N},\,7\in\mathbb{Z},\,7\in\mathbb{Q}$

$-7\notin\mathbb{N},\,-7\in\mathbb{Z},\,-7\in\mathbb{Q}$

$\frac{1}{7}\notin\mathbb{N},\,\frac{1}{7}\notin\mathbb{Z},\,\frac{1}{7}\in\mathbb{Q}$

$3^1\cdot 3^4=3^{1+4}=3^5$

$\left((-1)^3\right)^2=(-1)^{3\cdot 2}=(-1)^6=1$

$5^4:5^3=5^{4-3}=5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{27}{8}$

$(0,6)^2:2^2=(0,6:2)^2=0,3^2=0,09$

49 négyzetszám, mert $49=7^2$

256 négyzetszám, mert $256=16^2$

Oldjuk meg figyelmesen!

a) Keressük meg azokat a természetes számokat, melyeket négyzetre emelve a következő eredményeket kapjuk: 16, 49, 225. Találgatással kapjuk, hogy: $4^2=16$, $7^2=49$, $15^2=225$.

b) Határozzuk meg annak a négyzetnek oldalhosszát, melynek területe 144 cm².

$\mathcal{T}_{\square}=l^2$ és $\mathcal{T}_{\square}=144\text{ cm}^2$. Tehát $l^2=12^2$, azaz $l=12$ cm.

Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés Legyen $x\in\mathbb{N}$, négyzetszám. Az n természetes számot az x szám négyzetgyökének nevezzük, ha $x=n^2$. Így írjuk: $\sqrt{x}=n$. Így olvassuk: **négyzetgyök** x **egyenlő** n. Az n természetes számot az x szám másodrendű gyökének is nevezhetjük.

Példák

$\sqrt{25}=5$, mivel $5\in\mathbb{N}$ és $25=5^2$

$\sqrt{81}=9$, mivel $9\in\mathbb{N}$ és $81=9^2$.

$\sqrt{0}=0$, mivel $0\in\mathbb{N}$ és $0=0^2$.

$\sqrt{529}=23$, mivel $23\in\mathbb{N}$ és $529=23^2$.

Azt a műveletet, melynek során az $x \in \mathbb{N}$ négyzetszámnak megfeleltetünk egy olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, melyre igaz, hogy $x = n^2$, **négyzetgyökvonás**nak, vagy **gyökvonás**nak nevezzük.

négyzetszám

$25 = 5^2$

$\Downarrow$

$\sqrt{25} = 5$

négyzetgyöke

Négyzetszámok

$225 = 15^2$

$256 = 16^2$

$289 = 17^2$

$324 = 18^2$

$361 = 19^2$

$400 = 20^2$

$441 = 21^2$

Négyzetgyökök

$\sqrt{225} = 15$

$\sqrt{256} = 16$

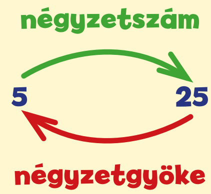
$\sqrt{289} = 17$

$\sqrt{324} = 18$

$\sqrt{361} = 19$

$\sqrt{400} = 20$

$\sqrt{441} = 21$



Alkalmazás

$$\sqrt{17^2} = 17;\ \sqrt{2019^2} = 2019;\ \sqrt{5^6} = \sqrt{\left(5^3\right)^2} = 5^3 = 125;$$

$$\sqrt{(38\cdot 7 + 98:14)^2} = 38\cdot 7 + 98:14;$$

$$\sqrt{2^{2018}} = \sqrt{\left(2^{1009}\right)^2} = 2^{1009};\ \sqrt{2^4\cdot 3^2} = \sqrt{\left(2^2\cdot 3\right)^2} = \sqrt{12^2} = 12$$

Következtetés:

$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$, ahol $n \in \mathbb{N}$

Tehát $\sqrt{n^2} = n$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Általában, egy négyzetgyökvonást tartalmazó kifejezésben előbb a négyzetgyövonásokat végezzük el, majd az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás műveletét.

$$\sqrt{36} + \sqrt{100} : \sqrt{25} = 6 + 10 : 5 = 8$$

$$\sqrt{64}\cdot\sqrt{9} + \sqrt{25}^{\sqrt{4}} = 8\cdot 3 + 5^2 = 49$$

Mégis, néha a négyzetgyökvonást más algebrai művelet elvégzése után is elvégezhetjük.

a) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{4} = 5\cdot 2 = 10$ és $\sqrt{25\cdot 4} = \sqrt{100} = 10$, azaz
$\sqrt{25}\cdot\sqrt{4} = \sqrt{25\cdot 4}$

b) $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$ és $\sqrt{\dfrac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$, azaz $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\dfrac{225}{25}}$

c) $\sqrt{1600} = \sqrt{16\cdot 100} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{100} = 4\cdot 10 = 40$
$\sqrt{\dfrac{1600}{49}} = \dfrac{\sqrt{1600}}{\sqrt{49}} = \dfrac{40}{7}$

Igazak az alábbi összefüggések:

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{x\cdot y}$ bármely $x, y \in \mathbb{N}$ négyzetszámok esetén.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y \neq 0$ bármely x, $y \in \mathbb{N}^*$, négyzetszám esetén.

c) $\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$, $x, y \in \mathbb{N}$ négyzetszám és $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$
$x, y \in \mathbb{N}$ négyzetszám esetén.

Ne kapkodj!

Feltehetjük a kérdést, hogy az összeadás és kivonás esetén is igaz-e az előbbiekhez hasonló összefüggés. Hasonlítsuk össze az alábbi eredményeket:

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ és $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$

$\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ és $\sqrt{169}-\sqrt{25}=13-5=8$

$\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$

$\sqrt{169-25}\neq\sqrt{169}-\sqrt{25}$

Következtetés: $\sqrt{x+y}$ és $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **nem egyenlő** bármely pozitív racionális szám esetén.

$\sqrt{x-y}$ és $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ **nem egyenlő** bármely pozitív racionális szám esetén.

Jegyezd meg!

Ha x négyzetszám, akkor azt az n természetes számot, melyre igaz az $x = n^2$ összefüggés, az x szám négyzetgyökének, vagy az x szám másodrendű gyökének nevezzük. Jelölés: $\sqrt{x}=n$.

$\sqrt{x}=n \Leftrightarrow x=n^2$, ahol $x\in\mathbb{N}$ négyzetszám és $n\in\mathbb{N}$.

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$; $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y\neq 0$, ahol $x, y\in\mathbb{N}$ négyzetszámok.

$\sqrt{n^2}=n$, ahol $n\in\mathbb{N}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. a) Írd le az összes 700-nál nagyobb és 1000-nél kisebb négyzetszámot!
b) Írd le az összes 123 és 321 közötti négyzetszámot!

2. Vizsgáld meg, hogy az alábbi számok közül melyik egy természetes szám négyzete: Indokold a választ.
a) 64, 100, 140, 333, 1000000
b) 2^4, $4^2\cdot 9$, 3^6, 21^8, 10^9, $5^{2\cdot n}$, $6^{4\cdot n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

3. Másold le a füzetbe az alábbi táblázatokat, majd egészítsd ki az üres cellákat, ahol x természetes szám.

a)

x	4	1	0	2	7	11
x^2						

b)

x^2	9	36	400	0	121	49
x						
$\sqrt{x^2}$						

4. Határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
$p_1: \sqrt{4}=2$;
$p_2: \sqrt{121}=11$;
$p_3: \sqrt{a^2}=a$, bármely $a\in\mathbb{N}$ esetén;
$p_4: \sqrt{11^2}=-11$;
$p_5: \sqrt{c^2}=c$, bármely $c\in\mathbb{Z}$ esetén;
$p_6: \sqrt{100\cdot b^4}=10\cdot b^2$, bármely $b\in\mathbb{Z}$ esetén.

5. Határozd meg az n természetes számot a következő esetekben!
a) $n^2 = 81$; b) $n^2 = 169$; c) $n^2 = 900$; d) $n^2 = 441$.

6. Bizonyítsd be, hogy x négyzetszám és számítsd ki $\sqrt{x}$ értékét!
a) $x = 19\cdot 9 + 19\cdot 10$;
b) $x = 2^{11} - 2^{10}$;
c) $x = 200 + 199\cdot 200$;
d) $x = n + n\cdot(n-1)$, $n\in\mathbb{N}^*$;
e) $x=\sqrt{441}+\sqrt{\dfrac{42\cdot 43+43\cdot 44}{2}}$;
f) $x=\dfrac{3^{n+2}-3^{n+1}-2\cdot 3^n}{3^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

7. a) Számítsd ki $x = 9^2 + 12^2$, majd $\sqrt{x}$ értékét;

b) Számítsd ki $y = 25^2 - 7^2$, majd $\sqrt{y}$ értékét;

c) Számítsd ki $z = 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 17 + 17^2$, majd $\sqrt{z}$ értékét.

8. a) Egészítsd ki a hiányzó részeket olyan természetes számokkal, melyekre érvényesek az egyenlőségek:
$2^2 \cdot 3^4 = (\ldots)^2$; $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = (\ldots)^2$
$2^{100} : 2^{84} = (\ldots)^2$; $2^6 \cdot 5^2 = (\ldots)^2$

b) Számítsd ki: $\sqrt{14^2}$; $\sqrt{7^4}$; $\sqrt{a^2}$, $a \in \mathbb{N}$;

c) Az a) alpont eredményeit használva számítsd ki! $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$; $\sqrt{2^{100} : 2^{84}}$; $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$.

9. Adott az $A = \{576, 484, 2025, 1600, 2500, 3600, 1521, 729, 529, 2116\}$ halmaz.

a) Bontsd prímtényezők szorzatára az A halmaz elemeit, majd írd fel ezeket a számokat szorzatok négyzeteként!

b) Az a) alpont eredményeit használva számítsd ki az A halmaz elemeinek négyzetgyökét!

10. Írd le mindegyik gyökjel alatti számot mint egy természetes szám négyzetét, majd végezd el a számításokat:

a) $\sqrt{1156} + \sqrt{3249} - \sqrt{1296}$

b) $\sqrt{1936} + \frac{1}{2}\sqrt{3844}$

c) $1{,}5 \cdot \sqrt{4900} - \sqrt{46656}$

11. a) Adott:
$A = 1 + 2 + \ldots + 10 + 10 \cdot (2^0 + 2^3 + + 2^4 + 2^5)$.
Bizonyítsd be, hogy A négyzetszám és számold ki $\sqrt{A}$ -t.

b) Adott a következő szám:
$B = 1 + 3 + 5 + \ldots + 19$. Bizonyítsd be, hogy B négyzetszám és számold ki $\sqrt{B}$ -t.

c) Adott a következő szám:
$C = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Bizonyítsd be, hogy C négyzetszám és számold ki $\sqrt{C}$ -t.

12. Próbálkozással ellenőrizd az alábbi kijelentéseket:

a) Ha $a, b \in \mathbb{N}^*$, akkor $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

b) Ha $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$, akkor $\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$.

2.ℓ. Racionális számok négyzetének négyzetgyöke

Emlékeztető

Az előző leckéből tudjuk, hogy:

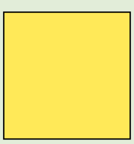
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $\quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$ $\quad \sqrt{n^2} = n$ $\quad \sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$ ahol x és y négyzetszámok, $n \in \mathbb{N}$.

Az $x = 0$ esetén $\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

Vizsgáljuk meg, hogy létezik-e $\sqrt{x}$, ha x pozitív racionális szám. Előbb azokkal a racionális számokkal foglalkozunk, amelyek pozitív racionális számok négyzetei.

Oldjuk meg figyelmesen!

Egy négyzet területe $1{,}69\ \text{m}^2$. Határozd meg a négyzet oldalának hosszát!



I. megoldás. $T_{\square} = l^2$, $T_{\square} = 1{,}69\ \text{cm}^2$. Tehát $l^2 = 1{,}3^2$, azaz $l = 1{,}3$ cm.

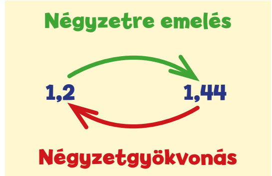
II. megoldás. Gyökvonás segítségével: $T_{\square} = l^2$, $T_{\square} = 1{,}69\ \text{cm}^2$.

Tehát $l^2 = 1{,}69$, azaz $l = \sqrt{1{,}69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = 1{,}3 \Rightarrow l = 1{,}3$ cm,

Másképpen: $l^2 = 1{,}69$, tehát $l = \sqrt{1{,}69} = \sqrt{1{,}3^2} = 1{,}3 \Rightarrow l = 1{,}3$ cm.

Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés
Az x pozitív racionális szám négyzetgyökének nevezzük azt az a pozitív racionális számot, melyre igaz, hogy $x = a^2$.
Így írjuk: $\sqrt{x} = a$.



A. Határozd meg kétféleképpen a következő négyzetgyököket: $a = \sqrt{1,44}$ és $b = \sqrt{0,0025}$

1) $a = \sqrt{1,44} = \sqrt{\dfrac{144}{100}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \dfrac{12}{10} = 1,2$

$b = \sqrt{0,0025} = \sqrt{\dfrac{25}{10000}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{10000}} = \dfrac{5}{100} = 0,05$

2) $a = \sqrt{1,44} = \sqrt{(1,2)^2} = 1,2$

$b = \sqrt{0,0025} = \sqrt{(0,05)^2} = 0,05$

Megjegyzés. Fontos, hogy az előnyösebb módszert válasszuk.

B. Észrevehető, hogy hasonlóan lehet négyzetgyököt meghatározni akkor is, ha a szám végtelen szakaszos tizedes tört formájában van megadva.

$$\sqrt{1,(7)} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \quad \text{és} \quad \sqrt{3,36(1)} = \sqrt{\frac{3361-336}{900}} = \sqrt{\frac{3025}{900}} = \sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{11}{6}.$$

Emlékeztető

Az $x \in \mathbb{Q}$ szám abszolút értéke:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Példák

$x = 3,5 > 0 \Rightarrow |x| = x = 3,5$

$x = -4 < 0 \Rightarrow |x| = -x = -(-4) = 4$

Fedezzük fel, értsük meg!

Tudjuk, hogy $\sqrt{n^2} = n$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mit jelent $\sqrt{x^2}$, ha $x \in \mathbb{Q}$.
Néhány példá:

- ha $x = 1,5$ akkor $\sqrt{x^2} = \sqrt{1,5^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 = x$;
- ha $x = -1,5$ akkor $-x = -(-1,5) = 1,5$, tehát $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1,5)^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 = -x$

Következtetés:

$\sqrt{x^2} = x$, bármely $x \geq 0$ esetén;

$\sqrt{x^2} = -x$, bármely $x < 0$ esetén.

Általánosan így írhatjuk:

$\sqrt{x^2} = |x|$, bármely $x \in \mathbb{Q}$ esetén.

Alkalmazás

a) Kiszámítjuk a $\sqrt{x^2}$ értékét $x = 8,9 - 5 : 4$ esetén.
Előbb elvégezzük: $x = 8,9 - 1,25 = 7,65$.
Mivel $x > 0$, alkalmazzuk a $\sqrt{x^2} = x$ képletet, és azt kapjuk, hogy $\sqrt{x^2} = \sqrt{(7,65)^2} = 7,65$.

b) Kiszámítjuk a $\sqrt{x^2}$ értékét, ha $x = 2,7 - 9 : 2$
Előbb elvégezzük: $x = 2,7 - 4,5 = = -1,8$.
Mivel $x < 0$, alkalmazzuk a $\sqrt{x^2} = -x$ és képletet:
$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1,8)^2} = 1,8$.

Ha az x racionális számról nem tudjuk eldönteni, hogy pozitív vagy negatív, akkor az általános képletet használjuk. $\sqrt{x^2} = |x|$, bármely x, racionális szám esetén.

c) Ha $x = 2 - 1{,}2 : 0{,}4$ akkor $\sqrt{x^2} = |x|$ és $|x| = |2 - 1{,}2 : 4|$.
Elvégezzük a szükséges műveleteket:
$\sqrt{x^2} = |x| = |2 - 1{,}2 : 0{,}4| = |2 - 3| = |-1| = 1$

Alkalmazás

a) $\sqrt{1{,}44} \cdot \sqrt{9} = 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6$ és $\sqrt{1{,}44 \cdot 9} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$

b) $\dfrac{\sqrt{1{,}44}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1{,}2}{3} = 0{,}4$ és $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{9}} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Igazak az alábbi összefüggések:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$, ha x, y két racionális szám négyzete esetén.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, ha x, y két racionális szám négyzete, $y \neq 0$.

Jegyezd meg!

Ha x egy racionális szám négyzete, akkor azt az a pozitív racionális számot, melyre igaz, hogy $x = a^2$, az x szám **négyzetgyökének** vagy az x **gyökének** nevezzük. Így írjuk $\sqrt{x} = a$.
Bármely olyan x és y szám esetén, mely racionális szám négyzete, igaz, hogy:

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ és $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y \neq 0$. $\sqrt{a^2} = |a|$, bármely $a \in \mathbb{Q}$ esetén.

Gyakorlatok és feladatok

1. Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét, majd egészítsd ki a mondatokat, hogy igazak legyenek:

$p_1 : \sqrt{100} = 10$ $p_2 : \sqrt{400} = -20$

$p_3 : \sqrt{\dfrac{1}{36}} = \dfrac{1}{6}$ $p_4 : \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$

$p_5 : \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{7}{2}$ $p_6 : \sqrt{20{,}25} = \dfrac{9}{2}$

$p_7 : \sqrt{0{,}09} = -0{,}3$ $p_8 : \sqrt{0{,}0676} = \dfrac{13}{50}$

a) A fenti kijelentések közül az igaz kijelentések a követezők: … .
b) A fenti kijelentések közül a hamis kijelentések a követezők: … .

2. Adott az $M = \left\{1{,}44; \dfrac{36}{25}; \dfrac{4}{16}; 3\dfrac{1}{16}; 1{,}(7)\right\}$ halmaz. Határozd meg a

$P = \left\{x \mid x = \sqrt{y},\ y \in M\right\}$ halmaz elemeit.

3. Másold a füzetbe az alábbi táblázatokat, majd töltsd ki mindkét táblázat üres celláit tudva, hogy a egy pozitív racionális szám.

a)

a	$\dfrac{2}{3}$	1	0	0,25	1,(3)	$\dfrac{5}{4}$	$2\dfrac{1}{3}$
a^2							

b)

a^2	$\dfrac{1}{9}$	2,25	$\dfrac{100}{49}$	0	$2\dfrac{1}{4}$	$\left(\dfrac{5}{4}\right)^4$	$(0{,}4)^6$
a							
$\sqrt{a^2}$							

4. Számítsd ki az m és n számok összegét tudva, hogy:

a) $m = 1 + \sqrt{0{,}09}$ és $n = 2 - \sqrt{\dfrac{49}{25}}$;

b) $m = \dfrac{2}{5} + \sqrt{\dfrac{25}{4}}$ és $n = 0{,}6 - \sqrt{6{,}25}$.

5. Számítsd ki:

a) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{81}{25}}$; $\sqrt{\frac{169}{4}}$; $\sqrt{\frac{625}{289}}$; $\sqrt{\frac{3}{300}}$

b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; $\sqrt{4\frac{29}{49}}$; $\sqrt{5\frac{29}{100}}$

c) $\sqrt{0{,}81}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{1{,}96}$; $\sqrt{4{,}41}$; $\sqrt{20{,}25}$

d) $\sqrt{\frac{2^4}{3^6}}$; $\sqrt{\frac{3^4\cdot 5^6}{7^2}}$; $\sqrt{\frac{12}{3^3\cdot 4^3}}$; $\sqrt{\frac{3^2+4^2}{7^2+24^2}}$

6. Másold a füzetbe az alábbi táblázatokat, majd töltsd ki ezek üres celláit tudva, hogy x egész számot jelöl.

a)

x	-2	-17	12	-2	17	-12
x^2						

b)

x^2	16	1	49	0	121	36
x						
$\sqrt{x^2}$						

7. Határozd meg az n egész szám értékeit az alábbi esetekben:

a) $n^2 = 81$;

b) $n^2 = 169$ és $n > 0$;

c) $n^2 = 900$ és $n < 0$.

8. Adott az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Határozd meg a következő halmazok elemeit:

$B = \{n \mid n = x^2,\ x \in A\}$

$C = \{m \mid m = \sqrt{n},\ n \in B\}$

9. Másold a füzetbe az alábbi táblázatokat, majd töltsd ki ezek üres celláit tudva, hogy a racionális számot jelöl. Hasonlítsd össze a b) alpontnál kapott értékeket a 2. feladatbeliekkel.

a)

a	1	-1	0	$-0{,}5$	$0{,}5$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$
a^2							

b)

a^2	$\frac{1}{9}$	$2{,}25$	$\frac{100}{49}$	0	$2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$(0{,}4)^6$
a							
$\sqrt{a^2}$							

3.ℓ. Pozitív racionális szám négyzetgyökének becslése

Emlékeztető

Pitagorasz tétele. Bármely derékszögű háromszögben az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével.

Ha $a, b \in \mathbb{Q}_+$ akkor $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

• A **becslés** egy mennyiség közelítő meghatározását jelenti, ha az adatok hiányosak vagy nem pontosak.
Míg a megközelítésnél ismerjük az eltérés maximális mértékét, a becslés esetében nem tudjuk, hogy milyen közel vagyunk a pontos értékhez.

• Ha egy számítás során a használt számok megközelítő értékeit használjuk, akkor a helyes eredmény becslését kapjuk meg.

Az ABC háromszögben $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, és igaz a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ összefüggés.

Példák

a) A Băneasa-erdőben levő fák mennyiségét pár százezerre becsülik.

b) A főváros lakosságát több, mint kétmillióra becsülik.

c) A célig hátralevő távolságot 5 km-re becsülik.

d) Tízesekre, hiánnyal való megközelítést használva a 16,2 + + 32+125,7 számítás eredménye 160. A helyes eredmény 173,9.

Oldjuk meg figyelmesen!

Feladat
Sára és Noémi vásárolni mentek Csilla nővérükkel. Három, egyenként 32,9 lejes mértani felszerelést, öt doboz, egyenként 19,29 lejes filctollat valamint tíz, egyenként 10,54 lejes füzetet vásároltak.

Sára: Szükségünk van kevesebb, mint 309 lejre.
Noémi: Szükségünk van több mint 291 lejre.
Csilla: Én azt mondom, hogy körülbelül 304 lejre van szükségünk.
A pénztáros bevezeti a termékek árát, kinyomtatja a számlát, és kijelenti: 300,15 lejt kell fizetni.
Hogyan magyarázható, hogy az összegek nem egyeznek meg? Hibázott valaki?

Ahhoz, hogy megértsük a nővérek válaszainak logikáját, gondoljuk végig a következő lépéseket:
Kiszámoljuk a *fizetni való összeget*: $S = 3 \cdot 32{,}9 + 5 \cdot 19{,}29 + 10 \cdot 10{,}5 = 300{,}15$ (lej)

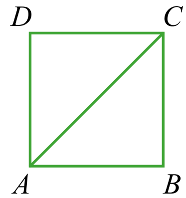
Felbecsüljük az összeget, úgy, hogy az árakat egységekre többlettel közelítjük:
$32{,}9 \approx 33$; $19{,}29 \approx 20$; $10{,}5 \approx 11$.
$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 11 = 309$

Felbecsüljük az összeget, úgy, hogy az árakat egységekre hiánnyal közelítjük:
$32{,}9 \approx 32$; $19{,}29 \approx 19$; $10{,}5 \approx 10$.
$S \approx 3 \cdot 32 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 10 = 291$

Felbecsüljük az összeget, úgy, hogy az árakat egységekre kerekítjük:
$32{,}9 \approx 33$; $19{,}29 \approx 19$; $10{,}5 \approx 11$.
$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 11 = 304$

Megjegyzés: Mindegyik nővér helyesen becsülte meg az összeget, csak különböző módon. A helyes válasz **legközelebbi becslése** az, amelyet a tagok kerekítésével kaptuk meg. Néha előnyös, ha mindegyik tagot hiánnyal vagy többlettel való közelítéssel adjuk meg. A becslések nagyon fontosak a hétköznapi tevékenységekkel kapcsolatos feladatokban. Ezek segítenek, hogy előnyös gyakorlati döntéseket hozzunk.

Gyakorlati alkalmazás:



1) Beosztásos vonalzó segítségével szerkeszd meg az *ABCD* négyzetet, melynek oldalhossza 1 dm.
2) Szerkeszd meg az *AC* átlóját.
3) Írd fel az *ABC* derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét.
4) Figyelmesen mérd meg az *AC* szakasz hosszát, használva a beosztásos vonalzót. Jegyezd le a mért értéket deciméterben, és hasonlítsd össze a szomszéd osztálytársaid értékeivel.

- *AC* az ABC háromszög átfogója, $AB = BC = 1$ dm, tehát: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, vagyis $AC^2 = 1 + 1 = 2$.
- Figyelmesen megmérve az *AC* szakasz hosszát 1,4 dm-hez közeli értékeket kapunk.

Fedezzük fel, értsük meg!

Az $AC^2 = 2$ egyenlőség azt jelenti, hogy létezik egy olyan szám (még nem ismerjük), melynek négyzete 2. Mivel az *AC* egy szakasz hossza, így $AC > 0$. Azt mondjuk, hogy $AC = \sqrt{2}$.
Mérésekből megállapítható, hogy a $\sqrt{2}$ szám értéke 1,4-re becsülhető.
Felmerül a kérdés: hány tizedes jegye van még? Meghatározható az összes?
Az alábbiakban néhány választ kaphatunk e kérdésre:

Ha $\sqrt{2} = q$, akkor $q^2 = 2$.
A *q* számot próbálgatással keressük.

$1^2 = 1$	$< 2 < 4$	$= 2^2$
$1{,}4^2 = 1{,}96$	$< 2 < 2{,}25$	$= 1{,}5^2$
$1{,}41^2 = 1{,}9881$	$< 2 < 2{,}0164$	$= 1{,}42^2$
$1{,}414^2 = 1{,}999396$	$< 2 < 2{,}002225$	$= 1{,}415^2$

A próbálgatások alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy nem kaptunk elegendő információt ahhoz, hogy meghatározzuk a *q* racionális számot, viszont elég közeli értékeket találtunk. Azt mondjuk, hogy a $\sqrt{2}$ számot fel tudjuk ***becsülni***. A fizikában racionális számok négyzetgyökének meghatározására, általában századokra, hiánnyal való közelítő értékeket használnak.
Példák: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$; $\sqrt{5} \approx 2{,}23$.

Bármely $x \geq 0$, ***racionális szám esetén létezik a*** $\sqrt{x}$ ***négyzetgyöke.***

$$\sqrt{x} = n \iff x = n^2, \text{ ahol } n \geq 0$$

Alkalmazás

Gyakran szükséges a négyzetgyököt megközelíteni egy ***természetes*** vagy egy ***pozitív racionális*** számmal. Ahhoz, hogy az x pozitív racionális szám négyzetgyökét természetes számmal megközelíthessük, közrefogjuk két, egymásutáni négyzetszámmal $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Előfordulhat, hogy x négyzetszám, és akkor $x = n^2$, valamint $\sqrt{x} = n$.

Ha $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $n \leq \sqrt{x} < n+1$.
Ha $0 \leq x \leq 100$, sakkor x-et az ismert négyzetszámokkal hasonlítjuk össze.

Példa.
Ha $x = 73$ akkor $64 < x < 81 \Leftrightarrow 8^2 < x < 9^2$ $\Leftrightarrow 8 < \sqrt{x} < 9 \Rightarrow \sqrt{x} \approx 8$ vagy $\sqrt{x} \approx 9$.

Ha $10^2 < x < 100^2$, vagyis $100 < x < 10\,000$, akkor $\sqrt{x} \approx \overline{ab}$. Az a számjegyet (tízesek) az előző eljárás alapján kapjuk meg abból a számból, amit az x utolsó két számjegyének (tízesek, egyesek) törlésével állítunk elő. Ezután az egyesek számjegyét próbálgatással kapjuk meg. Ajánlott, hogy $b = 5$ értékkel kezdjük.

Példa.
Ha $x = 5413$, akkor keressük a $\sqrt{x}$ természetes számmal közelített értékét. Mivel $10^2 < x < 100^2 \Rightarrow 10 < \sqrt{x} < 100 \Rightarrow \sqrt{x} \approx \overline{ab}$.
Töröljük az x utolsó két számjegyét, és a kapott számot (54) közrefogjuk két, egymásutáni négyzetszámmal:
$49 < 54 < 64 \Rightarrow 7^2 < 54 < 8^2$, azaz $a = 7$. Tehát $70 < \sqrt{x} < 80$.
Mivel 54 közelebb áll 49-hez, mint 64-hez, ezért $\sqrt{x} \approx 70$. Bizonyos gyakorlati alkalmazásokban ez a becslés elegendő, vagyis $\sqrt{5413} \approx 70$. A továbbiakban megkeressük az egyesek számjegyét is. Ha $b = 5$ akkor $\overline{ab}^2 = 75^2 = 5625 > x$. Ha $b = 4$ akkor $\overline{ab}^2 = 74^2 = 5476 > x$.
Ha $b = 3$ akkor $\overline{ab}^2 = 73^2 = 5329 < x$. Tehát $73^2 < x < 74^2 \Rightarrow 73 < \sqrt{x} < 73$ és $\sqrt{x} \approx 73$ vagy $\sqrt{x} \approx 74$.

Ha az x szám 5 vagy 6 számjegyből áll (vagyis $10^4 < x < 10^6$), akkor $\sqrt{x} \approx \overline{abc}$.
A százasok a számjegyét a fenti eljárás alapján keressük meg törölve az x szám utolsó négy számjegyét (egyesek, tízesek, százasok, ezresek). Ha szükséges a többi számjegyet próbálgatással keressük meg.

Példa.
Ha $x = 317\,492$ akkor keressük a $\sqrt{x}$ százasokra közelített értékét. Törölve az utolsó négy számjegyet, a kapott számot (31) közrefogjuk két, egymásutáni négyzetszámmal: $25 < 31 < 36 \Rightarrow 5^2 < 31 < 6^2$. Tehát a százasok számjegye $a = 5$ és $500 < \sqrt{x} < 600$.
Mivel 31 a 36-hoz áll közelebb, mint 25-höz, azt írhatjuk, hogy $\sqrt{x} \approx 600$.

Mégis, ***nagyon nagy számok*** esetén javasolt a ***számológép*** illetve a **négyzetgyökvonás algoritmusának** használata. A négyzetgyökvonás algoritmusának használata sok ideig hasznos volt, míg meg nem jelentek alkalmasabb számítási eszközök.

Ha $x \in \mathbb{Q}_+$ véges tizedes szám, átalakítva igy írható:
$x = \dfrac{y}{10^{2n}}$, ahol $y, n \in \mathbb{N}$, tehát $\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{y}}{10^n}$.
A $\sqrt{y}$ közelítését a fenti folyamat alapján végezzük.

Példa.
Közelítsük $\sqrt{x}$ értékét, ha $x = 93{,}4$.
Mivel $81 < 93{,}4 < 100 \Rightarrow 9 < \sqrt{93{,}4} < 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{93{,}4} \approx 9$ vagy $\sqrt{93{,}4} \approx 10$.
Ha tizedes pontossággal szeretnénk közelíteni, akkor:
$\sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{9340}{100}} = \dfrac{\sqrt{9340}}{10}$ és $\sqrt{9340} \approx \overline{ab}$.

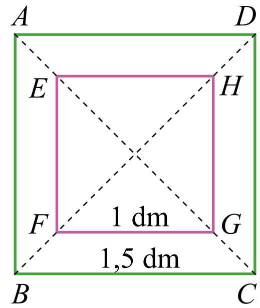
Töröljük az 9340 utolsó két számjegyét, és a kapott 93 számot közrefogjuk két, egymásutáni négyzetszámmal: $81 < 93 < 100 \Rightarrow 9^2 < 93 < 10^2$, azaz $a = 9$.

Ha $b = 5$, akkor $\overline{ab}^2 = 95^2 = 9025 < 9340$.
Ha $b = 6$, akkor $\overline{ab}^2 = 96^2 = 9216 < 9340$.
Ha $b = 7$, akkor $\overline{ab}^2 = 97^2 = 9409 > 9340$.

Tehát $96^2 < 9340 < 97^2 \Rightarrow 96 < \sqrt{9340} < 97 \Rightarrow$
$\sqrt{9340} \approx 96$ vagy $\sqrt{9340} \approx 97$, valamint
$\sqrt{93{,}4} \approx 9{,}6$ vagy $\sqrt{93{,}4} \approx 9{,}7$.

Feladat a portfólióba

1. Vágj ki papírból egy 1,5 dm oldalú négyzetet. Jelöld *ABCD*-vel.
2. Még vágj ki papírból egy 1 dm oldalú négyzetet. Jelöld *EFGH*-val.
3. Tedd egymásra a két négyzet középpontját, szúrd át és rögzítsd egy tűvel.
4. Tedd a nagyobbik négyzetet rögzített helyzetbe a padra/asztalra, majd forgasd az *EFGH* négyzetet a tű körül (lásd a mellékelt ábrát).
5. Kövesd figyelmesen a kisebbik négyzet csúcsait, és vedd észre, ha ezek áthaladnak a nagy négyzet oldalain.
6. Indokold válaszod, használva egy gyökmennyiség becsült értékét.

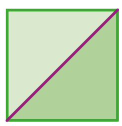


Jegyezd meg!

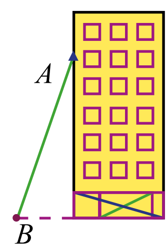
- A **becslés** egy mennyiség közelítő meghatározását jelenti, ha az adatok nem pontosak vagy hiányosak.
- Ha egy számítás során a számok megközelítő értékeit használjuk, akkor a helyes eredmény becslését kapjuk meg.
- Bármely $x \geq 0$ racionális szám esetén létezik a $\sqrt{x}$ négyzetgyöke.
- Az $a \geq 0$ esetén $\sqrt{x} = a$ akkor és csakis akkor, ha $x = a^2$.
- Ha $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $n \leq \sqrt{x} < n+1$. Ha $x = \dfrac{y}{10^{2n}}$ ahol $y, n \in \mathbb{N}$, akkor $\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{y}}{10^n}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Sándor hazafele egy olyan négyzet alakú parkon halad át, melynek oldala 120 m. Az ösvény, melyen halad egybeesik a négyzet átlójával. Közelítsd természetes számmal a parkban megtett távolságot, méterben kifejezve.



2. Egy szerelő csapat fel szeretne jutni az épületnek *A* ponttal jelölt erkélyére, amely 15,8 m távolságra van a földtől.
A szerelők egy létrát helyeznek el a *B* pontba, mely 4,2 m távolságra van az épülettől.
A csapatnak van 10 m, 18 m illetve 25 m hosszú kinyitható létrája. Ezek közül melyik a célnak megfelelő?



3. Adott az $A = \left\{\sqrt{199}, -\sqrt{300}, -\sqrt{144}\right\}$ halmaz. Az *A* halmaz mindegyik *x* eleme esetén határozd meg azt a legnagyobb egész számot, amely kisebb, mint *x,* vagy egyenlő vele.

4. Adott a

$$B = \left\{\sqrt{57}, -\sqrt{\frac{36036}{12}}, -\sqrt{789{,}1}\right\} \text{ halmaz.}$$

A *B* halmaz minden eleme esetén határozd meg azt a legkisebb egész számot, amely nagyobb nála, vagy egyenlő vele.

5. Töltsd ki az alábbi cellákat két-két egymásutáni egész számmal úgy, hogy igazak legyenek a relációk:

a) $\square < \sqrt{12} < \square$ c) $\square < \sqrt{1234} < \square$
b) $\square < -\sqrt{123} < \square$ d) $\square < -\sqrt{600} < \square$

6. Határozd meg a következő halmazokat:

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < \sqrt{x} < 4\right\}$;

$B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid -6 < \sqrt{x} < -5\right\}$;

$C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 10{,}5 < x^2 < 50{,}1\right\}$;

$D = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 23 < x^2 < 32\right\}$.

7. Határozd meg a $\sqrt{n^2 + n}$, aszám első tizedes jegyét minden $n \in \{1, 2, 3\}$ szám esetén.

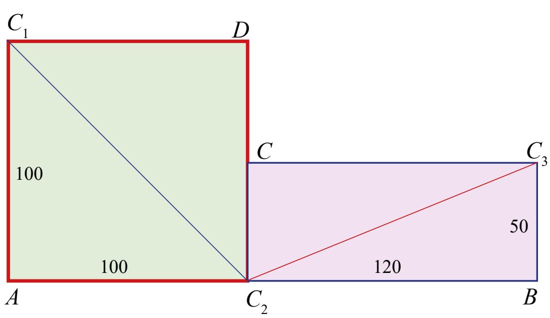
Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont.

I. *Írd ki mindenik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** A $8+\sqrt{8+\sqrt{8^2}}$ szám egyenlő: A. 8 B. 10 C. 12 D. 16
5p	**2.** A $\sqrt{900}-\sqrt{3^6}+\sqrt{(-2)^4}$ számítás eredménye: A. 1 B. 3 C. 5 D. 7
5p	**3.** A $2^4 \cdot 49$ szám négyzetgyöke: A. 14 B. 21 C. 28 D. 42
5p	**4.** Az a szám azon értéke, melyre $\sqrt{a+7}=17$ igaz: A. 10 B. 27 C. 100 D. 282
5p	**5.** Adott $x=\sqrt{0,(4)}$. Akkor: A. $x \in \mathbb{N}$ B. $x \in \mathbb{Z}$ C. $x \in \mathbb{Q}$ D. $x \notin \mathbb{Q}$
5p	**6.** Az $A=\left\{\sqrt{\frac{225}{49}}, \sqrt{2\frac{7}{9}}, \sqrt{\frac{300}{3}}, \frac{\sqrt{1,96}}{\sqrt{0,04}}, \sqrt{\frac{3^2\cdot 10^2}{5^2}}\right\}$, halmaz tartalmaz: A. egy természetes számot B. két természetes számot C. három természetes számot D. négy természetes számot
5p	**7.** Ha $\overline{abcde}$ teljes négyzet (négyzetszám), akkor $\sqrt{\overline{abcde}}$ -nek: A. 2 számjegye B. 3 számjegye C. 4 számjegye D. 5 számjegye van.
5p	**8.** Az $(a)\sqrt{10}\le 3$, $(b)\sqrt{10}\ge 4$, $(c)\sqrt{10}<3$, $(d)\sqrt{10}>3$ relációk közül az igaz: A. (a) B. (b) C. (c) D. (d)

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

 5p **5p** **5p**	**1.** Számítsd ki: a) $2\sqrt{81}-3\sqrt{64}+4\sqrt{49}-5\sqrt{36}$. b) $\left(\sqrt{36}-\sqrt{64}\right)\cdot\left(\sqrt{100}-\sqrt{144}\right)$. c) $\frac{\sqrt{1225}}{\sqrt{441}}\cdot\left(\sqrt{225}\right)^{-1}$.
 10p **10p**	**2.** Adott $a=\sqrt{25^2-20^2}-\sqrt{5^2+12^2}$ és $b=\sqrt{100}\cdot\left(\sqrt{\frac{49}{25}}-\sqrt{0,01}-\sqrt{1\frac{9}{16}}\right)$. a) Végezd el a számításokat és határozd meg az a és b számot! b) Mutasd ki, hogy $\sqrt{a\cdot b}$ természetes szám!
5p **10p**	**3.** Két barát ajándékot vásárol a C_1, C_2, C_3 üzletből. A mellékelt ábrán azok az utak vannak vázolva, melyeken a két barát járhat. A távolságok méterben vannak feltüntetve. a) Természetes számmal becsülve, határozd meg a $C_1-C_2-C_3$ útvonal hosszát, méterben kifejezve! b) Vizsgáld meg, hogy a $C_1-C_2-C_3$ útvonal a legrövidebb-e C_1 és C_3 között! 

1.2. Irracionális számok, példák. A valós számok halmaza, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bennfoglalás.

1.ℓ. Irracionális számok

Emlékeztető

A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle\vert\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$	Racionális számok: $\frac{2}{11}, \frac{-3}{8}, \frac{-4}{1}, \frac{10}{5}.$
Ha $x, y \in \mathbb{Q}$, akkor $x + y, x - y, x \cdot y, \frac{x}{y}\,(y \neq 0) \in \mathbb{Q}.$	Ha $x = 3{,}5$ és $y = 0{,}4$ racionális szám, akkor az összegük $x + y = 3{,}9$, különbségük $x - y = 3{,}1$, szorzatuk $x \cdot y = 1{,}4$ és hányadosuk $\frac{x}{y} = 8{,}75$ ugyancsak racionális szám.
Bármely pozitív racionális szám egyértelműen leírható egy $\frac{a}{b}$, alakú irreducibilis tört alakjába, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.	A $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}, \frac{20}{30}, \frac{200}{300}$ közönséges törtek ugyanazt a racionális számot jelentik, mivel $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \frac{20}{30} = \frac{200}{300}$, valamint irreducibilis alakban $\frac{2}{3}$.

Bármely pozitív racionális szám egyértelműen leírható a következő alakok egyikében:

– ***véges*** tizedes tört: $\frac{17}{5} = 3{,}4$;

– ***tiszta szakaszos végtelen*** tizedes tört, ahol a periódus (9)-től különböző (9): $\frac{14}{11} = 1{,}(27)$;

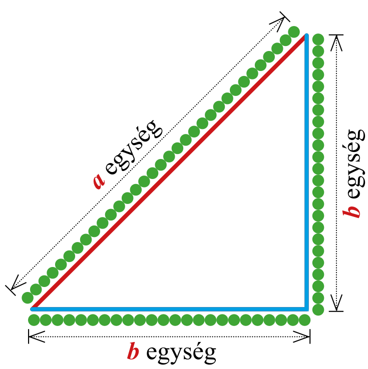
– ***vegyes szakaszos végtelen*** tizedes tört: $\frac{19}{12} = 1{,}58(3)$.

Bármely véges vagy végtelen tizedes tört racionális szám.

$3{,}5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$; $\quad 2{,}73 = \frac{273}{100}$ $\qquad 1{,}(27) = \frac{127-1}{99} = \frac{126^{(9}}{99} = \frac{14}{11}$ $\qquad 1{,}58(3) = \frac{1583-158}{900} = \frac{1425^{(75}}{900} = \frac{19}{12}$

Történelmi kitekintés

Pitagorasz (i.e. 580 körül – i.e.495) görög filozófus és matematikus.
Pitagorasznak és tanítványainak sok fontos mértani és algebrai felfedezést köszönhetünk.
Emlékeztetünk a tavaly tanult Pitagorasz-tételre. Pitagorasz szerint mindennek a szám az alapja, és véleménye szerint minden hosszúságot ki lehet fejezni természetes számokkal. Például azt gondolta, hogy egy egyenlőszárú derékszögű háromszög esetén létezik olyan kellőképpen kicsi mértékegység, hogy az átfogó hossza a egység, a befogók hossza pedig b egység hosszúságú legyen, ahol a és b nullától különböző természetes számok.
A Pitagorasz tétele alapján: $a = b\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} = \frac{a}{b}$



Fedezzük fel, értsük meg!

Kövessük azon idők matematikusainak kutatásait, amely alapján meg szerették volna határozni ezeket az a és b számokat. Az $\frac{a}{b}$ törtet irreducibilisnek tekinthetjük. Ha mégis $\frac{a}{b}$ egyszerűsíthető, akkor irreducibilis alakba hozható egyszerűsítés segítségével. A kapott tört ekvivalens lesz az eredetivel (ugyanazt a racionális számot jelentik). Tehát $a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \vdots 2 \Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow a = 2 \cdot k$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$.
Ha $a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2 \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$.
Következésképpen, $a \vdots 2$ és $b \vdots 2$, azaz $\frac{a}{b}$ tört egyszerűsíthető 2-vel, ami ellentmond annak, hogy az $\frac{a}{b}$ tört irreducibilis. Végül belátható, hogy nem létezik a és b természetes szám, melyre igaz, hogy $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Következtetés: $\sqrt{2}$ ***nem racionális szám***.

Így írjuk $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Az előző leckékben láttuk, hogy az egységnyi oldalhosszúságú négyzet átlójának hossza $\sqrt{2}$. Próbáltuk meghatározni $\sqrt{2}$, értékét, de nem sikerült olyan pontos $q \in \mathbb{Q}_+$ racionális számot találni, melyre igaz lenne $q^2 = 2$. Az említett próbálgatások nem győztek meg arról, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális. Szükséges volt a fenti bizonyítás.
Hiába $\sqrt{2}$ egy olyan szám, ami egy szakasz hosszát jelenti, mégsem az általunk ismert számok valamelyike, azaz nem racionális szám. Ez azt jelenti, hogy kell létezzenek a racionális számokon kívül más számok is. Ezeket ***irracionális számoknak*** fogjuk nevezni.

$\sqrt{2}$ ***irracionális szám.***

Mivel $\sqrt{2}$ irracionális szám, ez nem írható le véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakjában. Számológépet használva meg tudjuk határozni több tizedes jegyét: $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016 88...$ Gyakorlatban két tizedes pontossággal becsüljük meg: $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Alkalmazás

Hasonlóan, ha a 2-es számot kicseréljük bármely más ***p prímszámra***, bizonyítható, hogy $\sqrt{p}$ irracionális.	A 3, 5, 7 prímszámok, tehát $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ irracionális számok.
Általánosan, ha $n \in \mathbb{N}$ ***nem négyzetszám***, akkor $\sqrt{n}$ irracionális.	6, 8, 12 nem négyzetszámok, tehát $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{12}$ irracionális számok.
Ha $x \in \mathbb{Q}$ szám ***nem írható két négyzetszám arányaként***, akkor $\sqrt{x}$ irracionális.	$\frac{12}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}$ nem négyzetszámok aránya, tehát $\sqrt{\frac{12}{7}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{4}{5}}$ irracionális számok.
Irracionális szám ellentettje is irracionális szám.	$-\sqrt{2}, -\sqrt{8}, -\sqrt{15}$ irracionális számok.
Egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális szám.	$3+\sqrt{2}$; $7-\sqrt{5}$; $-9+\sqrt{3}$; $1{,}2+\sqrt{8}$ irracionális számok.
Egy nullától különböző racionális szám és egy irracionális szám szorzata irracionális szám.	$3\sqrt{2}$; $-7\sqrt{5}$; $(1{,}2)\sqrt{8}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ irracionális számok.
A π szám irracionális.	A π szám egy tetszőleges kör kerületének és átmérőjének aránya. Százados pontossággal közelítő értéke: $\pi \approx 3{,}14$.

Feladat a portfólióba:
Gyakorolj, igazolva, hogy a $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{0,7}$ irracionális számok.

Fogunk olyan irracionális számokkal is találkozni, melyek nem írhatók le gyökök segítségével. Ezeket végtelen, de nem szakaszos tizedes szám alakjában találjuk.

Tekintsük az $\alpha = 0,505005000500005\ldots$ számot (az első 5-ös számjegy után egy 0 van, a második után kettő, valamint az n-edik 5-ös számjegy után n darab 0). Az irracionális szám.

Jegyezd meg!

- Minden olyan számot, amely nem racionális szám, **irracionális számnak** nevezünk.
- Az $x \in \mathbb{Q}$ szám esetén: $\sqrt{x}$ akkor és csakis akkor irracionális szám, ha nem négyzetszám, vagy nem írható fel négyzetszámok arányaként.
- Egy szám akkor és csakis akkor irracionális, ha végtelen, nem szakaszos tizedes szám alakjában írható.
- Ha $q \in \mathbb{Q}^*$ és $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$,, akkor $-\sqrt{x}$, $q+\sqrt{x}$, $q\sqrt{x}$ irracionális számok.

Gyakorlatok és feladatok

1. Adott a következő halmaz
$$A=\left\{\sqrt{3};\ \sqrt{4};\ 2\sqrt{7};\ 9+\sqrt{12};\ 4-\pi;\ \frac{\sqrt{5}}{2};\ \sqrt{\frac{8}{18}}\right\}$$
a) Sorold fel az A halmaz racionális elemeit.
b) Sorold fel az A halmaz irracionális elemeit. Indokold a választ!

2. Tekintsük a $0,246810\ldots$ számot (növekvő sorrendbe illesszük az egymásutáni páros természetes számokat) és az $1,010010001\ldots$ számot (két 1-es számjegy közötti 0-k száma növekszik, ahogy haladunk jobbra)
a) Indokold meg, hogy a fenti számok miért irracionális számok!
b) Írj még két tizedes alakban felírt irracionális számot, indokolva a használt szabályt.

3. Írd le az $\sqrt{a}$ irracionális számok halmazát, ahol $a \in A$, tudva, hogy:
$A = \{15^2, 2^5, 3^6, 4^7, 7^3, 2^4, (-3)^2, 8^{11}, (-5)^2\}$.
Indokold szóban mindenik elem választását.

4. Bizonyítsd be, hogy a $\sqrt{8}$, $\sqrt{76}$, $\sqrt{193}$, $\sqrt{555}$, $\sqrt{1000}$ irracionális számok, használva annak lehetőségét, hogy közrefogd két egymásutáni négyzetszámmal. (Ha $x, y \in \mathbb{N}$ és $n^2 < x < (n+1)^2$, akkor $\sqrt{x}$ irracionális szám).

5. a) Írj három olyan x természetes számot, melyre $\sqrt{x+8}$ racionális szám.
b) Írj három olyan y természetes számot, melyre $\sqrt{5-y}$ irracionális szám.

6. a) Számítsd ki $2,7^2$ és $2,8^2$, majd tanulmányozd, hogy $\sqrt{7,31}$ racionális vagy irracionális szám.
b) Számítsd ki $3,24^2$ és $3,25^2$, majd tanulmányozd, hogy $\sqrt{10,4996}$ racionális vagy irracionális szám.

7. Adottak az $a = 10n + 3$ alakú természetes számok, $n \in \mathbb{N}$.
a) Írd le a legkisebb öt ilyen alakú számot.
b) Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{a}$ irracionális szám, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

8. Adottak a $b = 4n + 2$ alakú természetes számok, $n \in \mathbb{N}$.
a) Írd le a legkisebb öt ilyen alakú számot.
b) Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{b}$ irracionális szám, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

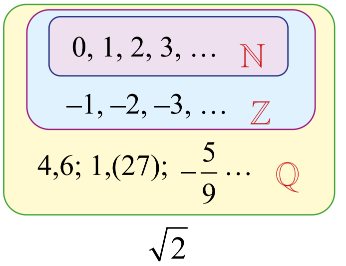
9. a) Határozd meg a $\sqrt{\overline{67ab}}$ alakú racionális számokat, ahol a és b számjegyek.
b) Határozd meg a $\sqrt{\overline{7cd6}}$ alakú racionális számokat, ahol c és d számjegyek.

2.l. A valós számok halmaza, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bennfoglalás

Emlékeztető

- Léteznek irracionális számok.
- Egy szám nem lehet egyszerre racionális és irracionális szám is.
- Egy racionális szám egyértelműen felírható mint véges vagy szakaszos végtelen tizedes tört, ahol a periódus különbözik (9)-től.
- Egy irracionális szám egyértelműen felírható mint nem szakaszos végtelen tizedes tört.
- Bármely természetes szám egyben egész és racionális szám is.
- Bármely egész szám egyben racionális szám is.
- Ha egy szám nem egész, akkor nem is természetes szám.
- Ha egy szám nem racionális, akkor se nem egész, se nem természetes szám.

Tudjuk, hogy $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



$3 \in \mathbb{N}$ tehát $3 \in \mathbb{Z}$ és $3 \in \mathbb{Q}$

$-3 \in \mathbb{Z}$ tehát $-3 \in \mathbb{Q}$

Ha $4{,}6 \notin \mathbb{Z}$, akkor $4{,}6 \notin \mathbb{N}$

Ha $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, akkor $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ és $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés: ***A racionális és irracionális számok halmazainak egyesítését a valós számok halmazának nevezzük, és*** $\mathbb{R}$ szimbólummal jelöljük.

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ racionális szám}\} \cup \{x \mid x \text{ irracionális szám}\}$

Értelmezzük a követező halmazokat is:

- $\mathbb{R}_+$ **pozitív valós számok** halmaza
- $\mathbb{R}_-$ **negatív valós számok** halmaza
- $\mathbb{R}^*$ **nullától különböző valós számok** halmaza

Azonnal megállapítható, hogy:

- bármely racionális szám valós szám;
- bármely irracionális szám valós szám.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

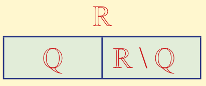
Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor $x \in \mathbb{R}$.
Az **irracionális számok halmaza** az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ különbség.

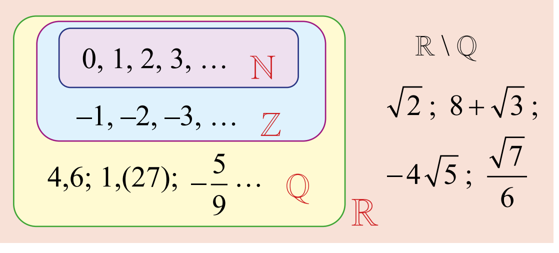
Alkalmazás

Tudva, hogy: 1) Bármely $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$; 2) Bármely $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$; 3) Bármely $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$, következtetjük az $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bennfoglalást.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

$\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *diszjunkt halmazok, azaz metszetük üres halmaz.*





Gyakorlatok és feladatok

1. Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét (igaz vagy hamis):

a) $4 \in \mathbb{N}$;

b) $-10 \in \mathbb{Z}$;

c) $\dfrac{12}{5} \in \mathbb{Q}$;

d) $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

e) $0 \notin \mathbb{N}$;

f) $-\dfrac{20}{4} \in \mathbb{Z}$;

g) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

h) $-3{,}1(5) \notin \mathbb{Q}$;

i) $\sqrt{(-7)^2} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

j) $\sqrt{1296} \in \mathbb{Q}$;

k) $\sqrt{10^0 + 10^1 + 10^2 + \ldots + 10^{10}} \in \mathbb{R}$.

2. Adott az

$$M = \left\{2{,}1; -\sqrt{9}; \sqrt{8}; (-3)^3; (0{,}1)^{-1}; \sqrt{1\frac{9}{16}}; \frac{15}{5}\right\}$$

halmaz: a) Írd le azt a halmazt mely tartalmazza az összes:

1) természetes számot az M halmazból;
2) egész számot az M halmazból;
3) racionális számot az M halmazból;
4) irracionális számot az M halmazból.

b) Az a) alpont adatait használva töltsd ki a táblázatot:

$M \cap \mathbb{N}$	
$M \cap \mathbb{Z}$	
$M \cap \mathbb{Q}$	
$M \cap \mathbb{R}$	

3. Tekintsük a $B = \left\{-\sqrt{49}; \sqrt{64}; \dfrac{-57}{-19}; \dfrac{\sqrt{81}}{-3}\right\} \cup \left\{\sqrt{2{,}(7)}; \dfrac{0}{7}; \sqrt{2^2 \cdot (-3)^4}; \sqrt{500}\right\}$ halmazt.

Egészítsd ki a hiányzó részeket úgy, hogy igaz egyenlőséget kapjunk!

a) $B \cap \mathbb{N} = \{\ldots\}$

b) $B \cap \mathbb{Z} = \{\ldots\}$

c) $B \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \{\ldots\}$

d) $B \cap \mathbb{Q} = \{\ldots\}$

e) $B \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \{\ldots\}$

f) $B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{\ldots\}$

4. Adott a

$$C = \left\{\sqrt{0{,}(1)}; -\sqrt{1\frac{3}{4}}; \frac{69}{23}; -3; \left(0{,}1(6)\right)^{-1}; \sqrt{7}\right\}$$

a) Keress egy olyan $D = \{a, b, c\}$ halmazt, melyre egyidejűleg teljesülnek az alábbi feltételek:
   1) A $C \cap D$ halmaznak pontosan két természetes eleme van.
   2) A $C \cup D$ halmaznak pontosan három irracionális eleme van.

b) Figyelembe véve a D, halmazt, határozzuk meg az alábbi kijelentések logikai értékét.

p_1: „D nem tartalmaz természetes számot.”
p_2: „D legtöbb két racionális számot tartalmaz.”

5. Egészítsd ki az alábbi kijelentéseket az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ szimbólumokkal úgy, hogy igazak legyenek:

a) Azok a számok, melyek felírhatók két egész szám arányaként, elemei a(z) … halmaznak.

b) Azok a számok, melyek véges tizedes számként írható, elemei a(z) … halmaznak.

c) Azok a számok, melyek szakaszos végtelen tizedes számként írhatóak, elemei a(z) … halmaznak.

d) Azok a számok, melyek nem írhatók fel két egész szám arányaként, elemei a(z) … halmaznak.

e) Ha a nem négyzete egy racionális számnak, akkor $\sqrt{a}$ eleme a(z) … halmaznak.

f) A racionális és irracionális számok halmazának egyesítése a(z) … halmaz.

6. Bizonyítsd be, hogy:

a) $\sqrt{1234} \notin \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{1 + 6^{78}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

c) $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{15 \text{ számjegy}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

d) $\sqrt{4^n} \in \mathbb{Q}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

7. Határozd meg az

$$E = \left\{\sqrt{x} \,\middle|\, 59 < x < 2^7,\ \sqrt{x} \in \mathbb{N}\right\}$$ halmazt.

1.3. Tényezők kiemelése a gyökjel alól. Tényezők bevitele gyökjel alá

Emlékeztető

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a^2}=a,\ \text{bármely } a \geq 0 \text{ esetén}\\ \sqrt{a^2}=-a,\ \text{bármely } a<0 \text{ esetén}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \sqrt{a^2}=|a|, \text{bármely } a \in \mathbb{Q}$

A fenti relációk $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ esetén is igazak.

Példák

$\sqrt{\pi^2}=\pi;$

$\sqrt{(1-\pi)^2}=-(1-\pi)=-1+\pi=\pi-1$

Fedezzük fel, értsük meg!

Kiemelni az *a* tényezőt a gyökjel alól azt jelenti, hogy a $\sqrt{a^2 b}$ kifejezést $a\sqrt{b}$ alakba írjuk, ahol $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

Ha az a kérés, hogy *emeljük ki a tényezőket a gyökjel alól*, akkor $\sqrt{n}$ számot, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ az $a\sqrt{b}$ alakba hozzuk, ahol b nem osztható egyetlen 1-től különböző négyzetszámmal sem.

a) $\sqrt{63}=\sqrt{9 \cdot 7}=\sqrt{9} \cdot \sqrt{7}=3 \cdot \sqrt{7}$
(kiemeltük a 3-as tényezőt a gyökjel alól).

b) $\sqrt{75}=\sqrt{25 \cdot 3}=\sqrt{25} \cdot \sqrt{3}=5 \cdot \sqrt{3}$
(kiemeltük a 5-ös tényezőt a gyökjel alól)

c) $\sqrt{700}=\sqrt{100 \cdot 7}=\sqrt{100} \cdot \sqrt{7}=10 \cdot \sqrt{7}$
(kiemeltük a 10-es tényezőt a gyökjel alól).

Példák

$\sqrt{72}=\sqrt{36 \cdot 2}=6\sqrt{2}$

$\sqrt{150}=\sqrt{25 \cdot 6}=5\sqrt{6}$

$\sqrt{120}=\sqrt{4 \cdot 30}=2\sqrt{30}$

Oldjuk meg figyelmesen!

Ahhoz, hogy könnyen eldöntsük, hogy a gyökjel alatti tényezők közül melyek négyzetszámok, hasznos a számot prímtényezők szorzatára bontani.

a) $\sqrt{147}=?$

$$\begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{147}=\sqrt{7^2 \cdot 3}$

$\sqrt{147}=7\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2450}=?$

$$\begin{array}{r|l} 2450 & 2 \\ 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{2450}=\sqrt{5^2 \cdot 7^2 \cdot 2}$

$\sqrt{2450}=5 \cdot 7\sqrt{2}=35\sqrt{2}$

c) $\sqrt{216}=?$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{216}=\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3}$

$\sqrt{216}=2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3}=6\sqrt{6}$

Fedezzük fel, értsük meg!

Gyakorlatban vannak olyan helyzetek, amikor a számítások egyszerűbb elvégzésének céljából érdemes olyan tényezőket is kiemelni a gyökjel alól, amelyek nem természetes számok.
Gyaníthatjuk, hogy a tényezők gyökjel alóli kiemelését általánosíthatjuk a racionális, sőt pozitív valós számok esetére is.

Tekintsük a $\sqrt{\frac{12}{25}}$ gyökmennyiséget, és kétféleképpen számoljuk ki, használva a tanult tulajdonságokat:

$$\sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}, \text{ illetve } \sqrt{\frac{12}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 3} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{5}\sqrt{3}.$$

Megállapíthatjuk, hogy mindkét számítás helyes.

A $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ kifejezést az ***a* tényező gyökjel alóli kiemelésének** nevezzük, ahol $a \geq 0, b \geq 0$.

Alkalmazás

$\sqrt{a^{2k} \cdot b} = a^k\sqrt{b}$, ahol $a \geq 0$, $b \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Ha a felbontásban $2k$ tényező van, amely a-val egyenlő, akkor az a^k tényezőt tudjuk kiemelni a gyökjel alól.

Példa. $\sqrt{2^8 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7} = 2^4 \cdot 3\sqrt{5 \cdot 7} = 48\sqrt{35}$

$\sqrt{a^{2k+1} \cdot b} = \sqrt{a^{2k} \cdot a \cdot b} = a^k\sqrt{a \cdot b}$
Ha a felbontásban $2k+1$ tényező van, amely a-val egyenlő, akkor az a^k tényezőt tudjuk kiemelni a gyökjel alól, valamint a gyökjel alatt is marad egy a tényező.

Példa. $\sqrt{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^6 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} =$
$= 2^3 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 24\sqrt{30}$

Külön-külön összeszorozzuk a gyökjel alól kiemelt és a gyökjel alatt maradt tényezőket is.

Azokban az algebrai számításokban, melyekben nem tudjuk, hogy az a tényező pozitív vagy negatív, így fogjuk írni $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

$$\sqrt{5x^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{5} = |x|\sqrt{5}$$

$$\sqrt{3x^4} = \sqrt{x^4}\sqrt{2} = \left|x^2\right|\sqrt{2} = x^2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2x^6} = \sqrt{x^6}\sqrt{2} = \left|x^3\right|\sqrt{2} = x^2|x|\sqrt{2}$$

A tényezők gyökjel alóli kiemelésével ellentétes a **tényezők bevitele gyökjel alá**.
Vagyis $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, ahol $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

Példák.

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$
(bevittem a 3-as tényezőt a gyökjel alá).

b) $7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$
(bevittem a 7-es tényezőt a gyökjel alá).

c) $0{,}8\sqrt{5} = \sqrt{(0{,}8)^2 \cdot 5} = \sqrt{0{,}64 \cdot 5} = \sqrt{3{,}2}$.
(bevittem a 0,8-as tényezőt a gyökjel alá)

Ne kapkodj!

Ha $a < 0$ és $b \geq 0$, akkor $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$. Példa: $-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -\sqrt{20}$.

Jegyezd meg!

- **Az *a* tényezőnek kiemelése a gyökjel alól:** $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, bármely $a \geq 0$, $b \geq 0$ esetén;
- **Az *a* tényezőnek bevitele a gyökjel alá**: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, bármely $a \geq 0$, $b \geq 0$ esetén.
- Bármely $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ esetén igaz, hogy $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.
- Ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor $\sqrt{a^{2k} \cdot b} = a^k\sqrt{b}$ és $\sqrt{a^{2k+1} \cdot b} = \sqrt{a^{2k} \cdot a \cdot b} = a^k\sqrt{a \cdot b}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjunk:

a) Ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor $\sqrt{a^2 \cdot b} = \ldots$.

b) Ha $a \leq 0$ és $b \geq 0$, akkor $\sqrt{a^2 \cdot b} = \ldots$.

c) Ha $a \in \mathbb{R}$ és $b \geq 0$, akkor $\sqrt{a^2 \cdot b} = \ldots$.

2. Emeld ki a tényezőket a gyökjel alól:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3}$;
b) $\sqrt{3^4 \cdot 5}$;
c) $\sqrt{5^6 \cdot 7}$;
d) $\sqrt{11^{10} \cdot 2}$;
e) $\sqrt{(-2)^2 \cdot 3}$;
f) $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5}$;
g) $\sqrt{(-5)^4 \cdot 7}$;
h) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$;
i) $\sqrt{(-7)^2 \cdot 101}$;
j) $\sqrt{5^4 \cdot 3^2 \cdot 2}$;
k) $\sqrt{(-2)^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$;
l) $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5^4 \cdot 7}$.

3. Emeld ki a tényezőket a gyökjel alól:

a) $\sqrt{2^7}$;
b) $\sqrt{3^{11}}$;
c) $\sqrt{2^5 \cdot 3^7}$;
d) $\sqrt{3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7}$;
e) $\sqrt{(-2)^3 \cdot (-3)^3}$;
f) $\sqrt{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^8}$;
g) $\sqrt{2^{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;
h) $\sqrt{3^{2n+3}}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Emeld ki a tényezőket a gyökjel alól:

a) $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{98}$;

b) $\sqrt{360}$, $\sqrt{192}$, $\sqrt{150}$, $\sqrt{288}$, $\sqrt{294}$, $\sqrt{972}$;

c) $\sqrt{2250}$, $\sqrt{2366}$, $\sqrt{3468}$, $\sqrt{9072}$, $\sqrt{10^5}$, $\sqrt{10^{11}}$.

5. A műveletek elvégzése után emeld ki a tényezőket a gyökjel alól:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 + \sqrt{2^4 \cdot 3^6}}$

b) $\sqrt{2^8 + 4 \cdot \sqrt{4096}}$;

c) $\sqrt{2^5 \cdot 3^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 2^4 \cdot 3^5}$.

6. Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét! Írd a füzetbe az igaz kijelentéseket!

a) $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$;

b) $-\sqrt{343} = 7\sqrt{7}$;

c) $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$, $0 < a$, $0 < b$;

d) $\sqrt{a \cdot b^2} = -b\sqrt{a}$, $b < 0 < a$;

e) Ha $\sqrt{288} = 12\sqrt{x}$, akkor $x = 2$.

f) Ha $\sqrt{675} = x\sqrt{3}$, akkor $x = 5$.

7. Egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjunk:

a) Ha $a > 0$ és $b \geq 0$, akkor $a\sqrt{b} = -\sqrt{\ldots}$;

b) Ha $a < 0$ és $b \geq 0$, akkor $a\sqrt{b} = -\sqrt{\ldots}$.

8. Vidd be a tényezőket a gyökjel alá!

a) $2\sqrt{3}$;
b) $5\sqrt{1,4}$;
c) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{24}$;
d) $-3\sqrt{2}$;
e) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{15}$;
f) $-\frac{5}{7}\sqrt{\frac{7}{5}}$.

9. Írd mindegyik kijelentés mellé az I betűt, ha igaz; illetve a H betűt hamis kijelentés esetén:

a) $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$;
b) $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$;
c) $-4\sqrt{7} = \sqrt{(-4)^2 \cdot 7}$;
d) $-2\sqrt{19} = -\sqrt{2^2 \cdot 19}$;
e) $6\sqrt{7} = 7\sqrt{6}$;
f) $-4\sqrt{12} = -8\sqrt{3}$.

10. Határozd meg azon x és y természetes számot, melyre igaz $x \cdot \sqrt{y} = \sqrt{153}$, ahol $x > 1$.

Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont.

I. *Határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét:*

3p	**1.** Az 1,3(4) racionális szám.	3p	**3.** A $\sqrt{225}$ valós szám.
3p	**2.** A $\sqrt{1,(7)}$ irracionális szám.	3p	**2.** $\left\{-\frac{\sqrt{1}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

II. *Írd ki mindenik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

	1. Tekintsük az $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{2019}\}$ halmazt!			
5p	**1.1.** Az $A \cap \mathbb{Q}$ halmaz elemeinek száma:			
	A. 40	B. 50	C. 45	D. 44
5p	**1.2.** Az $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ halmaz elemeinek száma:			
	A. 1974	B. 1975	C. 1976	D. 2018
5p	**2.** Adott $x \in \mathbb{N}$. A $\sqrt{77 - 7 \cdot x}$ racionális szám, ha:			
	A. $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$	B. $x \in \{0, 1, 9\}$	C. $x \in \{2, 3, 6, 8\}$	D. $x \in \{4, 11\}$
5p	**3.** Adott $y \in \mathbb{N}$. A $\sqrt{88 - 22 \cdot y}$ irracionális szám, ha:			
	A. $y \in \{0, 1, 2, 3\}$	B. $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$	C. $y \in \{0, 4\}$	D. bármely y természetes szám
5p	**4.** Ha $\sqrt{75} = a \cdot \sqrt{3}$, akkor a értéke:			
	A. 1	B. 3	C. 5	D. 6
5p	**5.** Tudva, hogy $\sqrt{500} = b \cdot \sqrt{c}$ és több természetes számot nem lehet a gyökjel alól kiemelni, akkor $b + c$ értéke:			
	A. 15	B. 12	C. 13	D. 14
5p	**6.** Ha $\sqrt{\frac{27}{12}} = \frac{d}{e}$, akkor $d - e$ értéke:			
	A. 1	B. 2	C. 3	D. 4
5p	**7.** Melyik halmaz tartalmaz csak irracionális számokat?			
	A. $\{\sqrt{1}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{17}\}$	B. $\{\sqrt{2}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{18}\}$	C. $\{\sqrt{2^2}, \sqrt{2^4}, \ldots \sqrt{2^{18}}\}$	D. $\{\sqrt{2^1}, \sqrt{2^3}, \ldots, \sqrt{2^{17}}\}$

III. *Társítsd az A oszlopbeli feladat sorszámát a B oszlopbeli helyes válasszal.*
Miután kiemelted a tényezőket a gyökjel alól, azt kapdad, hogy:

	A	B
3p	**1.** Ha $a > 0$, $\sqrt{9a^2} =$	**a.** $-3a\sqrt{-a}$
3p	**2.** Ha $a < 0$, $\sqrt{-9a^3} =$	**b.** $3a$
3p	**3.** Ha $a > 0$, $\sqrt{a^9 : a^3} =$	**c.** a^3
		d. $-3a$

	A	B
3p	**4.** Ha $a < 0$, $b > 0$, $\sqrt{a^2 b^2} =$	**e.** $a : b^2$
3p	**5.** Ha $a > 0$, $b > 0$, $\sqrt{a^2 : b^4} =$	**f.** $-a \cdot b$
3p	**6.** Ha $a < 0$, $b < 0$, $\sqrt{(a+b)^2} =$	**g.** $-a - b$
		h. $-a^2 : b$

IV. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

20p	Adott a $B = \left\{x \,\middle|\, x = \sqrt{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}, n \in \mathbb{N}^*, n < 10\right\}$. **a)** Írd le a B halmazt, elemeinek felsorolásával. **b)** Határozd meg a $B \cap \mathbb{Q}$ és $B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ halmazokat.

1.4. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítés segítségével. A számok összehasonlítása és rendezése. Valós szám abszolút értéke

1.ℓ. Valós számok tizedes törtek alakjában való közelítése. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítés segítségével

Emlékeztető

Az előző leckékben láttunk néhány módszert egy racionális és egy irracionális szám (tehát egy valós szám) értékének becslésére.

Egy valós számnak egységekre (tízesekre, százasokra, ezresekre, stb.) **hiánnyal való közelítő értéke** az a **legnagyobb**, csak egységekből (tízesekből, százasokból, ezresekből, stb.) álló természetes szám, amely kisebb vagy egyenlő az adott számmal.	Adott az $x=\sqrt{200}$. *Egységekre hiánnyal közelítve:* $\sqrt{200}\approx 14$ mert $14<\sqrt{200}<15$. *Tízesekre hiánnyal közelítve:* $\sqrt{200}\approx 10$ mert $10<\sqrt{200}<20$.
Egy valós számnak egységekre (tízesekre, százasokra, ezresekre, stb.) **többlettel való közelítő értéke** az a **legkisebb**, csak egységekből (tízesekből, százasokból, ezresekből, stb.) álló természetes szám, amely szigorúan nagyobb, mint az adott szám.	Adott az $x=\sqrt{200}$. *Egységekre többlettel közelítve:* $\sqrt{200}\approx 15$ mert $14<\sqrt{200}<15$. *Tízesekre többlettel közelítve:* $\sqrt{200}\approx 20$ mert $10<\sqrt{200}<20$.
Egy valós számnak egységekre (tízesekre, százasokra, ezresekre, stb.) **kerekített értéke** a számnak vagy hiánnyal, vagy többlettel való közelítő értéke, attól függően, hogy melyik a számhoz közelebbi érték. Abban az esetben, amikor a két fajta közelítő érték távolsága az adott számtól megegyezik, akkor a kerekített érték a többlettel való közelítő érték lesz.	*Egységekre többlettel közelítve:* $17{,}39\approx 17$ mert $17{,}39-17<18-17{,}39$; $17{,}69\approx 18$ mert $17{,}69-17>18-17{,}69$. *Tízesekre többlettel közelítve:* $17{,}39\approx 20$ mert $17{,}39-10>20-17{,}39$; $14{,}69\approx 10$ mert $14{,}69-10<20-14{,}69$. *Egységekre többlettel közelítve:* $19{,}5\approx 20$ mert $19{,}5-19=0{,}5=20-19{,}5$ *Tízesekre többlettel közelítve:* $395\approx 400$ mert $395-390=5=400-395$.

Fedezzük fel, értsük meg!

Tizedes számok tizedekre, századokra, ezredekre, stb. közelítő értékeinek meghatározási szabályai a fentiekhez hasonlóak.

Tekintsük a 12,7358 valós számot, majd közelítsük tizedekre, századokra, ezredekre, hiánnyal, többlettel, majd kerekítsük.

Igazak a következő egyenlőtlenségek:
$12{,}7<12{,}7358<12{,}8$; $\quad 12{,}73<12{,}7358<12{,}74$; $\quad 12{,}735<12{,}7358<12{,}736$

Egy valós számnak tizedekre (századokra, ezredekre, stb.) **hiánnyal való közelítő értékét** megkapjuk, ha töröljük az összes tizedes jegyét, amely a kívánt tizedes jegytől jobbra helyezkedik el.	Tizedekre: $12{,}7358\approx 12{,}7$; Századokra: $12{,}7358\approx 12{,}73$; Ezredekre: $12{,}7358\approx 12{,}735$.

Egy valós számnak tizedekre (századokra, ezredekre, stb.) **többlettel való közelítő értékét** megkapjuk, ha a hiánnyal való közelített értékében a tizedek (századok, ezredek, stb.) számjegyét eggyel növeljük.

Tizedekre: $12{,}7358 \approx 12{,}8$.
Századokra: $12{,}7358 \approx 12{,}74$.
Ezredekre: $12{,}7358 \approx 12{,}736$.

Egy valós számnak tizedekre (századokra, ezredekre, stb.) kerekített értéke nem más, mint a számnak arra a tizedes jegyére hiánnyal vagy többlettel közelítő értéke, attól függően, hogy melyik a számhoz közelebbi az érték. Abban az esetben, amikor a kétfajta közelítő érték távolsága az adott számtól megegyezik, akkor a kerekített érték a többlettel való közelítő érték lesz.

Tizedekre: $12{,}7358 \approx 12{,}7$.
Századokra: $12{,}7358 \approx 12{,}74$.
Ezredekre: $12{,}7358 \approx 12{,}736$.

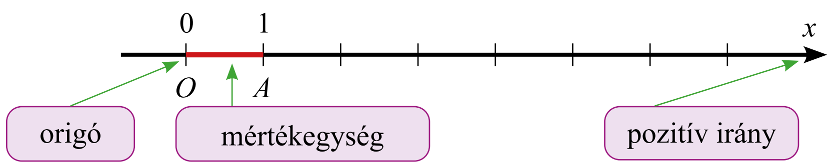
Ahhoz, hogy el lehessen dönteni, melyik közelítés pontosabb, néha hosszú számításokra van szükség.
Egy *gyakorlati módszer* a kerekített érték meghatározására:
Abban az esetben, amikor a törölt tizedes jegyek közül az első 0, 1, 2, 3 vagy 4, akkor hiánnyal való közelítést használunk. Amikor viszont 5, 6, 7, 8 vagy 9, akkor a kerekített érték megegyezik a többlettel való közelítő értékkel.

Tizedekre: $12{,}7358 \approx 12{,}7$
ahol $3 < 5$.
Századokra: $12{,}7358 \approx 12{,}74$
ahol $5 = 5$.
Ezredekre: $12{,}7358 \approx 12{,}736$
ahol $8 > 5$.

Észrevétel: A gyakorlatban, megegyezés szerint, egy vagy két tizedes pontossággal közelítő értéket használnak. A számnak tizedekre, hiánnyal való közelítését még egy tizedes pontossággal való közelítésnek is nevezzük. A számnak századokra, hiánnyal való közelítését még két tizedes pontossággal való közelítésnek is nevezzük.
Megjegyzés: A valós számoknak közelítése tizedes tört alakjában nagyon jól használható a pontok számtengelyen való helyzetének becslésére, valós számok összehasonlítására, illetve a számok növekvő vagy csökkenő sorrendbe való rendezésére.

Értelmezés: Azt az egyenest, amelyen rögzítettünk egy *pontot* (*kezdőpont* vagy origó a neve), egy *mértékegységet* és egy *pozitív irányítást*, számtengelynek nevezzük.

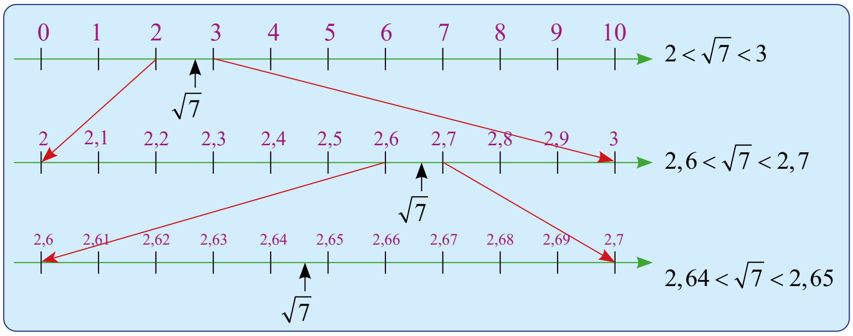
Az origót általában O ponttal jelöljük. Az alábbi ábrán $OA = 1$ a mértékegység, valamint a pozitív irányítás balról jobbra halad, és nyíllal jelöltük.



Az Ox tengelyen, minden valós számnak egyértelműen megfelel az egyenes egy M pontja. Fordítva is igaz, azaz az egyenes minden M pontjának egyértelműen megfelel egy a valós szám, amelyet az M pont **koordinátájának** (vagy **abszcisszájának**) nevezünk, és x_M-mel jelöljük.
Az $x_M = a$ jelölésből azt értjük, hogy a az M **pont abszcisszája**, vagy az M pont az a **valós számnak a számtengelyen való ábrázolása**. Ezt még M jelöléssel is leírhatjuk (olvasd: a abszcisszájú M pont, vagy az M pont koordinátája a).
Mivel a valós számok és a számtengely pontjai között egyértelmű megfeleltetés van, a számtengelyt még **valós számtengelynek** is nevezzük.
Ne feledd: A pozitív számokat az origótól jobbra, míg a negatív számokat az origótól balra ábrázoljuk; 0 az origó abszcisszája.
Általában az **irracionális számokat** tizedes tört alakjában közelített *racionális számokkal* adjuk meg.
Példa. Kiszámoljuk számológéppel a $\sqrt{7}$ értékét, majd megtartjuk pontosan az első nyolc tizedes jegyét, vagyis $\sqrt{7} = 2{,}64575131\ldots$
A $\sqrt{7}$ számnak hiánnyal vagy többlettel közelítő, illetve kerekített értékei:

	Hiánnyal való közelítés	Többlettel való közelítés	Kerekítés
Egységekre	2	3	3
Tizedekre	2,6	2,7	2,6
Századokra	2,64	2,65	2,65
Ezredekre	2,645	2,646	2,646

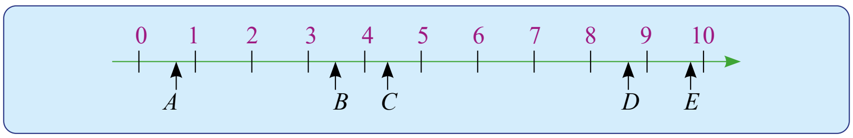
Az alábbi ábrán, a $\sqrt{7}$, számnak a valós számtengelyen való ábrázolását szemléltettük, használva a tizedes törtkénti megközelítését.



Feladat: Az alábbi rajzon, az A, B, C, D és E pontok abszcisszái a: $\sqrt{0{,}6}, \sqrt{20}, \sqrt{76}, \sqrt{15}, \sqrt{97}$ számok valamelyike

Követve a megadott mintát, becsüld fel a megadott számokat, majd az ábrán elfoglalt helyük alapján határozd meg a felsorolt pontok koordinátáit.

$0^2 < 0{,}6 < 1^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{0{,}6} < 1.$ Mivel $0 < x_A < 1$ azt kapjuk, hogy $x_A = \sqrt{0{,}6}$.

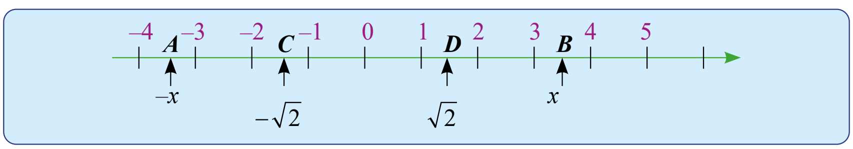


A **negatív valós** számoknak, a számtengelyen való ábrázolási módja megegyezik a negatív racionális számok ábrázolási módjával, vagyis:

Az x és $-x$ ellentett számokat az origó különböző oldalán ábrázoljuk, az O ponttól egyenlő távolságra. A pozitív számot az origó jobb oldalán, a negatív számot az origó bal oldalán ábrázoljuk.

Példák. Ha $x \in \mathbb{R}_+$, akkor az A és B, pontokat, melyeknek koordinátái $-x$, illetve x, a számtengelyen az O ponttól x távolságra ábrázoljuk.

A $-\sqrt{2}$, illetve $\sqrt{2}$, koordinátájú C és D pontokat, a számtengelyen, az O ponttól $\sqrt{2}$ távolságra ábrázoljuk.



Jegyezd meg!

Azt az egyenest, amelyen rögzítettünk egy pontot (O pont), egy mértékegységet ($OA = 1$ szakasz) és egy irányítást (balról jobbra) *számtengelynek* nevezzük.

Az $M(a)$ vagy $x_M = a$ jelölés azt jelenti, hogy:
- a az M pont **abszcisszája**;
- az M pont az a valós számnak a számtengelyen való **ábrázolása**.

Az x és $-x$ ellentett számokat az origó különböző oldalán ábrázoljuk, az origótól egyenlő távolságra.

Gyakorlatok és feladatok

1. a) Közelítsd hiánnyal az egységekre:
$\sqrt{7}$, $\sqrt{234}$, $\sqrt{1000}$.
b) Közelítsd többlettel az egységekre:
$\sqrt{312}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{2019}$.

2. a) Közelítsd hiánnyal a tizedekre:
$\sqrt{3}$, $\sqrt{20}$.
b) Közelítsd többlettel a századokra:
$\sqrt{5}$, $\sqrt{32}$.

3. Használva az egész számokkal végzett műveletek szabályait és a számológépet, töltsd ki az alábbi táblázatot. A számokat két tizedes pontossággal add meg (hiánnyal közelítve a századokra):

$\frac{17}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{29}{7}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{50}$

4. Adott a következő szám $a = 1{,}234567$.
a) Közelítsd hiánnyal az a számot, előbb egységekre, majd századokra.
b) Közelítsd többlettel az a számot, előbb tizedekre, majd ezredekre.

5. Töltsd ki úgy az üres cellákat, hogy $a < x < a + 1$, alakú relációt kapj, ahol a egész szám.
a) $\square < \sqrt{3} < \square$;
b) $\square < \sqrt{27} < \square$;
c) $\square < \sqrt{150} < \square$;
d) $\square < -\sqrt{3} < \square$;
e) $\square < -\sqrt{20} < \square$;
f) $\square < -\sqrt{27} < \square$.

6. a) Bizonyítsd be számításokkal az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $(2{,}2)^2 < 5 < (2{,}3)^2$;
2) $(2{,}23)^2 < 5 < (2{,}24)^2$;
3) $(12{,}2)^2 < 150 < (12{,}3)^2$;
4) $(12{,}24)^2 < 150 < (12{,}25)^2$.
b)) Közelítsd hiánnyal tizedekre a $\sqrt{5}$ számot;
c) Közelítsd többlettel századokra a $\sqrt{5}$ számot;
d) Közelítsd hiánnyal századokra a $\sqrt{150}$ számot;
e) Közelítsd többlettel tizedekre a $\sqrt{150}$ számot.

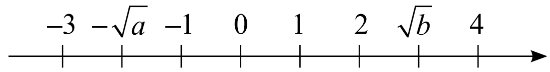
7. Ábrázold a valós számtengelyen az $\frac{1}{2}$; $-0{,}5$; $\frac{3}{2}$; -2; $\frac{5}{2}$; $-1{,}5$, számokat, figyelembe véve, hogy a mértékegység 1 cm hosszú szakasz!

8. Mértékegységként egy 5 cm hosszú szakaszt használva ábrázold a valós számtengelyen a $0{,}2$; -1; $1{,}3$; $-0{,}6$; $\frac{3}{10}$; $\frac{5}{5}$; $1\frac{1}{10}$ számokat!

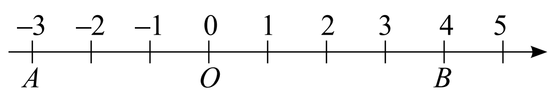
9. Válassz egy megfelelő mértékegységet, majd ábrázold a számtengelyen a
$\sqrt{2}$; -3; $\frac{11}{5}$; $-\sqrt{3}$; 1; $\sqrt{5}$ számokat!

10. Az $A(-1)$, $B(x)$, $C(y)$, $D(3)$ pontokat ebben a sorrendben ábrázoltuk a számtengelyen. x racionális számot, y pedig egy irracionális számot jelöl.
a) Írj egy példát az x és y számra, majd készíts a feladat adatainak megfelelő ábrát!
b) Ellenőrizd, hogy az $AB + CD = AC + BD$ egyenlőség igaz-e.

11. Az alábbi ábrán látható számtengelyen csak racionális számokat ábrázoltunk. Határozd meg az a és b természetes számokat!



12. A következő ábrán O a számtengely kezdőpontja.



a) Az ábra alapján határozzuk meg az A és B pontok abszcisszáit;
b) Ábrázold a számtengelyen a $C\left(-\sqrt{2}\right)$ és $D\left(2\sqrt{6}\right)$, pontot, közelítve koordinátáikat;
c) Használva az A, B, C, D és O, pontok sorrendjét, indokold meg az $AC + CO = AO$, illetve $AD - DB = AB$ egyenlőségeket.

13. Adott egy olyan valós szám, melyben az ezredek számjegye nullától különböző. Határozd meg a századok számjegyét tudva, hogy:
a) a tizedekre és századokra, hiánnyal való közelítő értékek egyenlők;
b) a tizedekre és századokra, többlettel való közelítő értékek egyenlők.

2.l. Valós számok összehasonlítása és rendezése

Emlékeztető

Eddig, a természetes (egész, racionális) számok összehasonlítására és rendezéséhez sikeresen használtuk a számtengelyen való ábrázolást, és értelmeztük a ≤ relációt (rendezési relációt).

Ha x_A és x_B két racionális szám, $x_A < x_B$ akkor és csakis akkor, ha az A pont a B ponttól balra van ábrázolva a számtengelyen.
Ha x_A és x_B két racionális szám, $x_A > x_B$ akkor és csakis akkor, ha az A pont a B ponttól jobbra van ábrázolva a számtengelyen.
Ha x_A és x_B két racionális szám, $x_A \leq x_B$ akkor és csakis akkor, ha az A pont a B ponttól balra van ábrázolva, vagy egybeesőek a számtengelyen.
Ha x_A és x_B két racionális szám, $x_A \geq x_B$ akkor és csakis akkor, ha az A pont a B ponttól jobbra van ábrázolva, vagy egybeesőek a számtengelyen.

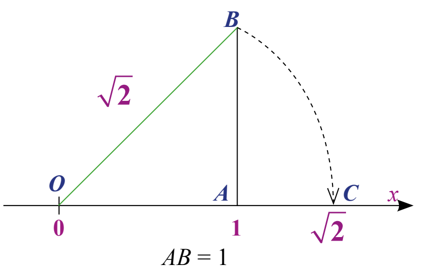
Példák

$2 < 5$ mert
$A(2)$ a $B(5)$ ponttól balra helyezkedik el
$5{,}3 > 5{,}2$ mert
$B(5{,}3)$ az $A(5{,}2)$ ponttól jobbra helyezkedik el
$3{,}1 \leq 3{,}5$ mert $3{,}1 < 3{,}5$
$3{,}1 \leq 3{,}1$ mert $3{,}1 = 3{,}1$
$-13{,}4 \geq -13{,}9$ mert $-13{,}4 > -13{,}9$
$-13{,}4 \geq -13{,}4$ mert $-13{,}4 = -13{,}4$

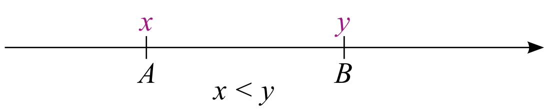
Mivel $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, azt gondoljuk, hogy végtelen sok valós számot (természetes, egész, racionális) össze tudunk hasonlítani és rendezni. Hátra van még, hogy a fenti gondolatmenetet kiterjesszük az *irracionális* számokra.

Fedezzük fel, értsük meg!

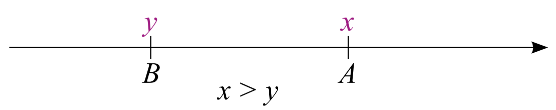
Vannak olyan irracionális számok, amelyeket pontosan tudjuk ábrázolni a számtengelyen. Például a $\sqrt{2}$ pontos ábrázolását körző segítségével végezhetjük. Mégis, általában az irracionális számok ábrázolásánál ezen számok becslését használjuk. Előző leckékben tapasztaltuk, hogy a számnak a számtengelyen való ábrázolását jelentő pont jobbra helyezkedik el ahhoz a ponthoz képest, ami a számnak hiánnyal való közelítő értékét ábrázolja, illetve balra helyezkedik el ahhoz a ponthoz képest, ami a számnak többlettel való közelítő értékét ábrázolja.



Nyilvánvaló a következő megállapítás: ha x, y valós számok, valamint $A(x)$ és $B(y)$ pontok, akkor.



Az A pont a B ponttól balra helyezkedik el akkor és csakis akkor, ha $x < y$.



Az A pont a B ponttól jobbra helyezkedik el akkor és csakis akkor, ha $x > y$.

Mivel a számtengely minden pontjának egyértelműen megfelel egy valós szám, az A és B pontok egybeesőek akkor és csakis akkor, ha $x = y$.

Bármely két valós szám esetén a következő relációk csupán egyike igaz: $x < y$ vagy $x = y$ vagy $x > y$
Összehasonlítani két, x és y valós számot azt jelenti, hogy a fenti három reláció közül melyik igaz.

A valós számok halmazán igazak a következő megállapítások:
$(x < y \text{ vagy } x = y) \Leftrightarrow x \leq y$; $(x > y \text{ vagy } x = y) \Leftrightarrow x \geq y$; $(x < y \text{ vagy } x > y) \Leftrightarrow x \neq y$.

Feladat: Adott az $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5}\right\}$ halmaz. Határozd meg a B, C, D, E halmazokat, ha: $B=\left\{x\in A \mid x\le 2\right\}$. $C=\left\{x\in A \mid x\ge 2\right\}$, $D=\left\{x\in A \mid x=2\right\}$, $E=\left\{x\in A \mid x\ne 2\right\}$.

Megoldás: $\sqrt{2}=1,4\ldots.\Rightarrow\sqrt{2}<2$; $\sqrt{3}=1,7\ldots.\Rightarrow\sqrt{3}<2$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{5}=2,2\ldots.\Rightarrow\sqrt{5}>2$.

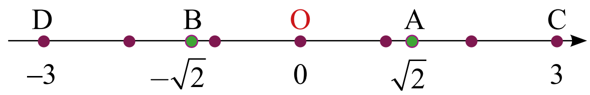
Tehát $B=\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4}\right\}$, $C=\left\{\sqrt{4},\ \sqrt{5}\right\}$, $D=\left\{\sqrt{4}\right\}$, $E=\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}\right\}$.

Ha az x és y valós számok közé a $<, >, \le, \ge, =$ vagy $\ne$ szimbólumok egyikét tesszük úgy, hogy igaz kijelentést kapjunk, akkor azt mondjuk, hogy az x és y számok között egy relációt állapítottunk meg.
A valós számok halmazán a $\le$ reláció tulajdonságai: 1) reflexív ($x\le x$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén), 2) antiszimmetrikus (ha $x\le y$ és $y\le x$, akkor $x=y$) és 3) tranzitív (ha $x\le y$ és $y\le z$, akkor $x\le z$).
Ezek a tulajdonságok abban segítenek majd, hogy a valós számok összehasonlítására eljárásokat gondoljunk ki.
A valós számok halmazán igazak, hogy:

Mindegyik negatív valós szám kisebb bármelyik pozitív valós számnál;	$-15<1$; $-\sqrt{3}<\sqrt{0,2}$.
Bármely negatív valós szám kisebb 0-nál.	$-13,5\,(3)<0$; $-\sqrt{119}<0$.
Ha $x<0$, $y<0$, akkor igaz az ekvivalencia: $x<y$ akkor és csakis akkor, ha $-x>-y$.	$-\sqrt{19}<-\sqrt{12}\Leftrightarrow\sqrt{19}>\sqrt{12}$.
Ha x, a, $y\in\mathbb{R}$ különböző számok, $x<a$ és $a<y$, akkor $x<y$.	$\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ha x és y és y pozitív valós számok, akkor $x\le y\Rightarrow\sqrt{x}\le\sqrt{y}$.	$4,9\ <\ 5\Rightarrow\sqrt{4,9}<\sqrt{5}$.

Oldjuk meg figyelmesen!

1. Esetleg tizedes pontossággal közelítve ábrázold a számtengelyen a $0,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 3,\ -3$. számokat. Figyeld meg a számoknak megfelelő pontokat, majd rendezd növekvő sorrendbe ezeket a számokat.



$\mathrm{D}-\mathrm{B}-\mathrm{O}-\mathrm{A}-\mathrm{C}\Rightarrow\ -3<-\sqrt{2}<0<\sqrt{2}<3$.

2. a) Számítógépet használva írd le a $\sqrt{5}$ számot két tizedesnyi pontossággal.
   b) Hasonlítsd össze a $\sqrt{5}$ és 2,23 számokat.
   c) Hasonlítsd össze a 2,23 és 2,(2) számokat.
   d) Hasonlítsd össze a $\sqrt{5}$ és 2,(2) számokat.

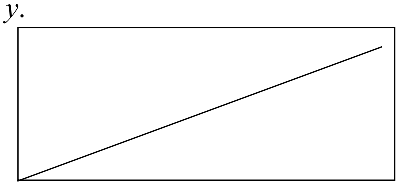
a) $\sqrt{5}=2,23\ldots$.
b) $\sqrt{5}>2,23$;
c) $2,23>2,(2)$
d) $\sqrt{5}>2,23$ és $2,23>2,(2)$ tehát $\sqrt{5}>2,(2)$.

3. Hasonlítsd össze az $x=3\sqrt{5}$ és $y=2\sqrt{11}$ számokat.

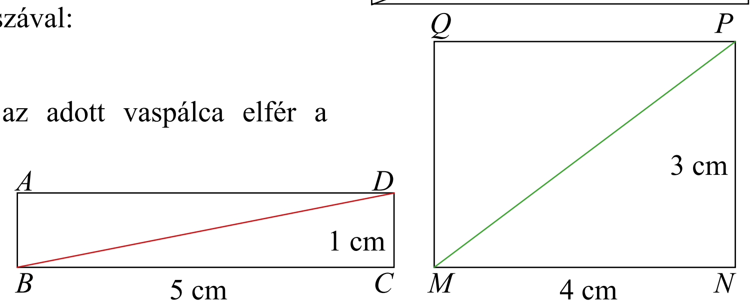
Megoldás: Bevisszük a tényezőket a gyökjel alá. Tehát:
$x=3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot5}=\sqrt{45}$, $y=2\sqrt{11}=\sqrt{2^2\cdot11}=\sqrt{44}$.
Mivel $45>44\ \Rightarrow\ \sqrt{45}>\sqrt{44}\ \Rightarrow\ x>y$.

?

4. Döntsd el, hogy egy 58 cm hosszú vékony vaspálca teljes mértékben elfér-e egy doboz téglalap alakú alján, melynek méretei 50 cm, illetve 30 cm.
Megoldás: A téglalap belsejében elférő vaspálca maximális hossza egyenlő az átló hosszával:
$d=\sqrt{50^2+30^2}=\sqrt{3400}=58,3\ldots$
Mivel $58<\sqrt{3400}\Rightarrow58<d$, tehát az adott vaspálca elfér a dobozban.



5. Tanulmányozd, hogy a mellékelt téglalapok közül melyiknek nagyobb az átlója.



Jegyezd meg!

- Ha x_A és x_B két racionális szám, $x_A < x_B$ akkor és csakis akkor, ha az A pont a B ponttól balra van ábrázolva a számtengelyen.
- Bármely negatív valós szám kisebb, mint 0, és mint bármelyik pozitív szám.
- Ha x és y pozitív valós számok, akkor: $x \le y \Leftrightarrow \sqrt{x} \le \sqrt{y}$.
- $x < 0$, $y < 0$ és $x \ne y$, esetén $x < y$ akkor és csakis akkor ha $-x > -y$.
- Az $x < y$ vagy $x > y$ vagy $x = y$ relációk közül csupán az egyik igaz, bármely x és y valós szám esetén.
- **Összehasonlítani** két, x és y valós számot azt jelenti, hogy eldöntjük, melyik igaz a következő relációk közül: $x < y$ vagy $x > y$ vagy $x = y$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Ábrázold a számtengelyen, majd rendezd növekvő sorrendbe az alábbi számokat. Határozd meg mindegyik esetben a legkisebb és legnagyobb számot!

a) $-3{,}1;\ -3\frac{1}{4};\ -\left(-3\frac{1}{2}\right);\ \frac{19}{5};$

b) $\sqrt{3};\ -2;\ -\sqrt{2};\ 1-\sqrt{1{,}44};\ 1{,}6.$

2. Vidd be az egészeket a gyökjel alá, majd hasonlítsd össze a számokat:

a) $2\sqrt{3}$ és $3\sqrt{2}$; c) $-20\sqrt{2}$ és -28;

b) $8\sqrt{5}$ és $10\sqrt{3}$; d) $-6\sqrt{6}$ és $-7\sqrt{5}$.

3. Töltsd ki a cellákat a $<$, $=$, $>$ szimbólumok valamelyikével, úgy, hogy igazak legyenek a kijelentések:

a) $2\sqrt{6}\ \square\ 5$ h) $2\sqrt{5}\ \square\ 5\sqrt{2}$;

b) $3\sqrt{7}\ \square\ 5\sqrt{3}$; i) $\frac{4}{3}\ \square\ \sqrt{\frac{5}{3}}$;

c) $7\sqrt{10}\ \square\ 9\sqrt{6}$; j) $\sqrt{48}\ \square\ 0$;

d) $4\sqrt{2}\ \square\ \sqrt{32}$; k) $0\ \square\ -\sqrt{6}$;

e) $\sqrt{196}\ \square\ 7\sqrt{4}$; l) $-3\ \square\ -\sqrt{\frac{27}{3}}$;

f) $-5\ \square\ -2\sqrt{6}$; m) $\sqrt{99}\ \square\ -7\sqrt{2}$;

g) $-2\sqrt{7}\ \square\ -\sqrt{30}$; n) $-8\sqrt{7}\ \square\ -2\sqrt{448}$.

4. Tekintsük az alábbi kijelentéseket:

p_1: „$3 < \sqrt{7}$” p_5: „$\sqrt{43} > 6{,}55$”

p_2: „$\sqrt{19} > 5$” p_6: „$-3\sqrt{6} > -4\sqrt{5}$”

p_3: „$\sqrt{120} < 11 < \sqrt{130}$” p_7: „$\left|\frac{73}{5} - 13{,}2\right| > \sqrt{2}$”

p_4: „$\sqrt{8} < 2{,}9$” p_8: „$\sqrt{(-7)^2 \cdot 99} < 70$”

Határozd meg a kijelentések logikai értékét, majd sorold fel az I és H halmazok elemeit, ahol I az igaz kijelentések halmaza, H pedig a hamis kijelentések halmaza.

5. Rendezd növekvő sorrendbe:

a) $\sqrt{2};\ 1{,}41;\ 1{,}(41);$

b) $2\sqrt{6};\ 5;\ 3\sqrt{3}.$

6. Rendezd csökkenő sorrendbe:

a) $7;\ 2\sqrt{11};\ 4\sqrt{3};\ 3\sqrt{5};$

b) $-8;\ -3\sqrt{7};\ -6\sqrt{2};\ -2\sqrt{15}.$

7. Határozd meg azt az $n \in \mathbb{Z}$, számot, melyre igaz, hogy:

a) $n < \sqrt{41} < n+1;$

b) $n < -\sqrt{8} < n+1;$

c) $\frac{9}{5} < \sqrt{n} < \frac{9}{4}.$

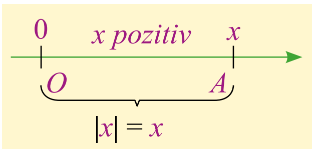
8. Írj:

a) három példát olyan r racionális számra, melyre igaz $\sqrt{2} < r < \sqrt{3}$;

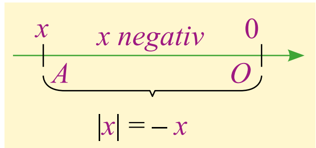
b) három példát olyan p irracionális számra, melyre igaz $1 < p < 2$.

3.ℓ. Valós szám modulusa (abszolút értéke)

Emlékeztető

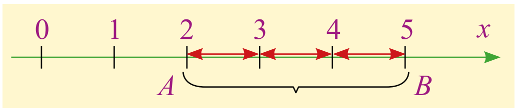


Az $x \in \mathbb{Q}$ szám modulusa a számtengely kezdőpontja és az x abszcisszájú A pont közötti távolságot jelenti.
A mellékelt ábrákon $|x| = OA$.



Az x szám modulusát még az x szám abszolút értékének is nevezzük.
Az A pont abszcisszáját az A pont koordinátájának is nevezzük, x_A szimbólummal jelöljük.
Az A pontot az x szám számtengelyen való ábrázolásának nevezzük, $A(x)$ szimbólummal jelöljük.

A számtengely két, A és B pontjai közötti **távolság** a pontok x_A illetve x_B koordinátái közötti egységek száma.



A mellékelt ábrán $AB = 3$.
Láthatjuk, hogy $x_B - x_A = 5 - 2 = 3 = AB$,
majd $x_A - x_B = 2 - 5 = -3$, tehát $AB = 3 = -(x_A - x_B)$ vagy $AB = x_B - x_A$.
Következtetésként $AB = |x_B - x_A|$ vagy $AB = |x_A - x_B|$, bármely x_A és x_B valós szám esetén.

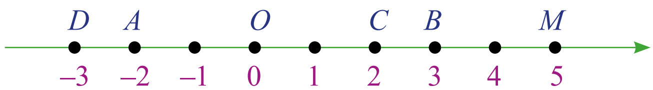
Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés: Az x valós szám modulusa a számtengelyen a kezdőpont és az $A(x)$ pont közötti távolság.
Vagyis $|x| = OA$, ahol O a számtengely kezdőpontja, A pedig az x számnak a számtengelyen való ábrázolása.

Ábrázold a számtengelyen az:
$A(-2)$, $B(3)$, $C(3^2 - 7)$, $D(-3)$ pontokat.

a) Számítsd ki OA, OB, OC, OD, majd határozd meg $|-2|$, $|2|$, $|3|$, $|-3|$.

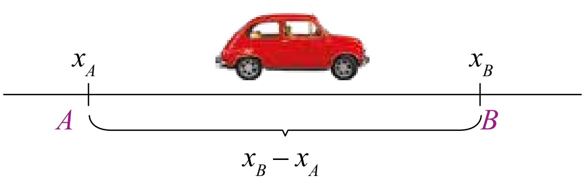
b) Keresd meg azt az $M(x)$ pontot, melyre $|x - 5| = 0$.



$OA = 2 \Rightarrow |-2| = 2$; $OB = 3 \Rightarrow |3| = 3$; $OC = 2 \Rightarrow |2| = 2$;
$OD = 3 \Rightarrow |-3| = 3$.
$|x - 5| = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow M(5)$.

Oldjuk meg figyelmesen!

Az autópályán, egy személygépkocsi megteszi az A és B kilométertáblák közötti távolságot.
Ezeken a táblákon az: $x_A = 43$ (km) és $x_B = 98$ (km) számok láthatók. Megállapíthatjuk, hogy $x_B > x_A$.
Feltételezve, hogy az autópálya egyenes vonal, a személygépkocsi által megtett távolság $AB = x_B - x_A = 98 - 43 = 55$ (km).



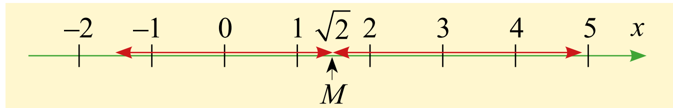
$$AB = |x_B - x_A|$$

Ha nem tudjuk, hogy az x_A és x_B számok közül melyik a nagyobb, akkor két tetszőleges A és B pont közötti távolság: $AB = |x_B - x_A|$ vagy $AB = |x_A - x_B|$.

Más tantárgybeli alkalmazás: fizikában az A pontot, melyből a személygépkocsi indul, kiindulási pontnak nevezik és abszcisszáját x_i-vel jelöljük. A B pontot, ahova a személygépkocsi érkezik, végpontnak nevezik és abszcisszáját x_f-fel jelöljük $x_B - x_A$ különbség jelölése $\Delta x = x_f - x_i$.

Fedezzük fel, értsük meg!

Ha úgy tekintünk két valós szám modulusára, mint a számtengelyen való ábrázolásaik közötti távolságra, határozzuk meg azokat az x egész számokat, melyekre $\left|x-\sqrt{2}\right|<3$.



Megoldás: Ábrázoljuk a számtengelyen az $M\left(\sqrt{2}\right)$ pontot. Keressük a számtengelyen azokat a pontokat, melyek koordinátái egész számok, és az M pont két oldalán helyezkednek el kisebb, mint 3 távolságra. Figyelve a számtengelyt, a –1, 0, 1, 2, 3, 4 megoldásokat találtuk.

A modulusnak a racionális számok esetében tanult tulajdonságai igazak a valós számok esetében is.

$|x| = x$, bármely $x \geq 0$ esetén

$|x| = -x$, bármely $x < 0$ esetén

$|x| \geq 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|-x| = |x|$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$\sqrt{x^2} = |x|$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$|x+y| \leq |x| + |y|$, bármely $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ esetén

$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$, bármely $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ esetén

$|x^n| = |x|^n$, bármely $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ esetén

$\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$, bármely $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$ esetén

Az $|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0 \\ -a, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$

a **modulus kifejtése**.

Példák

$\left|\sqrt{7}\right| = \sqrt{7}$

$\left|-\sqrt{5}\right| = -\left(-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}$

$\left|\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} \geq 0$ és $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2} \geq 0$

$\left|-\sqrt{8}\right| = \left|\sqrt{8}\right|$

$\sqrt{\pi^2} = |\pi| = \pi$; $\quad \sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2} = \left|-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}$

$|0,5+(-1,4)| \leq |0,5| + |-1,4| \Leftrightarrow 0,9 \leq 1,9$

$|0,5| \cdot |-1,4| = 0,5 \cdot 1,4 = 0,7$ és $|0,5 \cdot (-1,4)| = |-0,7| = 0,7$

$\left|(-0,5)^3\right| = |-0,125| = 0,125$ és $|-0,5|^3 = 0,5^3 = 0,125$

$\dfrac{|-1,4|}{|0,5|} = \dfrac{1,4}{0,5} = 2,8$ és $\left|\dfrac{-1,4}{0,5}\right| = |-2,8| = 2,8$

Ha $x \geq 1$, akkor $x-1 \geq 0$ és $|x-1| = x-1$.

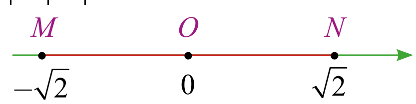
Ha $x < 1$, akkor $x-1 < 0$ és $|x-1| = -(x-1)$.

Alkalmazás

1. Egy modulus értéke annál nagyobb, minél nagyobb az origó és az ábrázolt pont közötti távolság.

Legyen O a számtengely origója, $x_A = -7$ és $x_B = +5$ számtengelyen levő A és B pontok abszcisszái.
Akkor, $OA = 7$ és $OB = 5$, tehát $OA > OB$ és $|-7| > |+5|$.

2. Minden pozitív valós a szám esetén léteznek olyan x valós számok, melyre $|x| < a$ vagyis az összes olyan valós szám, melyek ábrázolása $M(-a)$ és $N(a)$ pontok között található.



3. Bármely pozitív valós a szám esetén pontosan két olyan valós szám létezik, melyre $|x| = a$ vagyis: $x = a$ és $x = -a$.

Az $|x| = 2$ egyenlőséget teljesítő valós számok +2 és –2, illetve az $|x| = \sqrt{3}$ egyenlőséget a $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$ számok teljesítik.

4. Két negatív egész szám összehasonlítását újra fogalmazhatjuk használva a két szám modulusát, így: Az $x < 0$, $y < 0$ esetén: $x < y$ akkor és csakis akkor, ha $|x| > |y|$.

Igaz: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ vagy $x = -y$

Jegyezd meg!

- $|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0 \\ -x, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$
- Ha $x \in \mathbb{R}$, a számtengelyen levő A pont abszcissza, akkor $|x| = OA$, ahol O a számtengely kezdőpontja.
- Két pozitív valós szám közül az a nagyobb, melynek modulusa nagyobb.
- Két negatív valós szám közül az a nagyobb, melynek modulusa kisebb.
- $AB = |x_B - x_A|$, ahol x_A és x_B a számtengelyen levő A és B pont abszcisszája.

Gyakorlatok és feladatok

1. Egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjunk:
a) Ha $a \in \mathbb{R}$ és $a > 0$, akkor $|a| = \dots$.
b) Ha $b = 0$, akkor $|b| = \dots$.
c) Ha $c \in \mathbb{R}$ és $c < 0$, akkor $|c| = \dots$.

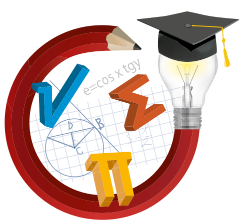
2. Számítsd ki az x szám modulusát majd töltsd ki a táblázat üres celláit.

x	5	$2{,}8$	$-\frac{7}{2}$	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{16}$	$(-2)^3$	0
$-x$							
$\lvert x\rvert$							

3. Végezd el:
a) $(|-0{,}1| + |0{,}2| - |-0{,}3|) : |-2019|$;
b) $\left|-2^3\right| + \left|(-3)^2\right| - \left|\sqrt{|-2\cdot 3|\cdot|-3\cdot(-2)|}\right|$.

4. Fejezd ki modulus segítségével:
a) $x \in \{-5, 5\}$;
b) $-8 < x < 8$;
c) $-3 \leq x - 2 \leq -1$.

5. Határozd meg az y valós számot:
a) $|y| = 4{,}5$ és $y > 0$;
b) $|y| = \sqrt{3}$ és $y < 0$;
c) $\left|y\sqrt{2}\right| = 0$
d) $|7y| = |y|$.



6. Határozd meg az $M = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \left|x^3\right| < 1234\right\}$ halmaz elemeinek számát.

7. a) Ha $x > 0$, számítsd ki:
$E_1 = |x| + |-3| + |x + 27:3| - |2x|$;
b) Ha $x < 0$, számítsd ki:
$E_2 = |x| + |x - 1| - |2x - 2|$;
c) Ha $x > 0$, számítsd ki:
$E = |x| + |-3| + 4x - 1 - |2x|$

8. Egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjunk:
a) Ha $x \in \mathbb{N}$ és $|x| < \sqrt{5}$, akkor $x \in \{\dots\}$.
b) Ha $x \in \mathbb{Z}_-$ és $|x| < \sqrt{7}$, akkor $x \in \{\dots\}$.
c) Ha $x \in \mathbb{Z}^*$ és $\left|\frac{x}{3}\right| \leq 0{,}(3)$, akkor $x \in \{\dots\}$.

9. Határozd meg a következő halmazok elemeit:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sqrt{(-3)^2} < x < |-5|\right\},$$

$$B = \left\{y \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2 \leq \sqrt{y^2} \leq 2^2\right\},$$

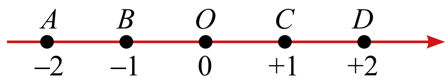
$$C = \left\{z \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|z + \frac{2}{5}\right| = \frac{3}{5}\right\},$$

$$D = \left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{7}{|t-1|} = 1\right\}.$$

Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont.

I. *Írd ki mindenik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** A 8 négyzetgyökének egy tizedesnyi pontossággal, hiánnyal való közelítő értéke: A. 2,6 B. 2,7 C. 2,8 D. 2,9
5p	**2.** A 10 négyzetgyökének századokra, többlettel való közelítő értéke: A. 3,17 B. 3,16 C. 3,18 D. 3,00
5p **5p**	**3.** Ábrázold a mellékelt számtengelyen az $M\left(-\sqrt{2}\right)$ és $P\left(\sqrt{3}\right)$, pontokat, majd oldd meg a 3.1 és 3.2 feladatot.  **3.1.** Melyik szakasznak eleme az M pont: A. AB B. BO C. OC D. CD **3.2.** Melyik szakasznak eleme a P pont: A. AB B. BO C. OC D. CD
5p	**4.** Az $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}, c=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ szám növekvő sorrendben: A. a, b, c B. c, b, a C. b, a, c D. a, c, b
5p	**5.** Az $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, z=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ szám csökkenő sorrendben: A. x, z, y B. y, z, x C. z, y, x D. z, x, y
5p	**6.** Ha $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ és $5 < x < 7$, akkor x lehetséges értéke: A. 6 B. $\sqrt{6}$ C. 36 D. $\sqrt{38}$
5p	**7.** Ha $y \in \mathbb{Z}$ és $\sqrt{12} < y < \sqrt{22}$, akkor y lehetséges értéke: A. 20 B. 13 C. 5 D. 4

II. *Egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapj!*

5p	**a)** Ha $\sqrt{x^2}=-x$, akkor x … szám .
5p	**b)** Ha $\sqrt{y^6}=y^3$, akkor y … szám.

III. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

15p	**1.** Adott az $a=\sqrt{(-2)^2}$, $b=\sqrt{(-3)^4}$ és $c=\sqrt{(-5)^6}$ szám. Határozd meg az $a : \lvert -2^0\rvert + b : \lvert -3^1\rvert + c : \lvert -5^2\rvert$ számot.
5p **5p** **10p**	**2. a)** Tanulmányozd, hogy a 3 és $\sqrt{10}$ szám közül melyik a nagyobbik; **b)** Tanulmányozd, hogy a 2 és $\sqrt{6}$ szám közül melyik a kisebbik; **c)** Ha $a=\left\lvert 3-\sqrt{10}\right\rvert+\left(\sqrt{10}-3\right)$ és $b=\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2}$, akkor mutasd ki: $0 < b - a < 1$.

1.5. Műveletek valós számokkal. Az $a\sqrt{b}$ alakú nevezők gyöktelenítése

1.ℓ. Valós számok összeadása, kivonása, szorzása és osztása

Tudjuk, hogy a valós számok halmaza nem más, mint a racionális és irracionális számok halmazának egyesítése. Ezért a racionális számok halmazán értelmezett műveletek tulajdonságait felhasználhatjuk a valós számok halmazán végzett műveletek tanulmányozásakor.

Emlékeztető

Két szám (természetes, egész, racionális) összeadása az a művelet, melynek során bármely két a és b számnak (természetes, egész, racionális) megfelel egy $a + b$ szám (természetes, egész, racionális). Az a és b összeadandó **tagok**, illetve az $a + b$ szám neve **összeg**.

$$\underbrace{9 + 2}_{\text{tagok}} = \underbrace{11}_{\text{összeg}}$$

Két szám (természetes, egész, racionális) **szorzása** az a művelet, melynek során bármely két a és b számnak (természetes, egész, racionális) megfelel egy $a \cdot b$ szám (természetes, egész, racionális). Az a és b szorzó **tényezők**, illetve az $a \cdot b$ szám neve **szorzat**.

$$\underbrace{9 \cdot 2}_{\text{tényezők}} = \underbrace{18}_{\text{szorzat}}$$

Ha a és b *racionális szám*, akkor az a számból kivonni a b számot azt jelenti, hogy összeadjuk az a számot a b szám ellentettjével.

Ha a és b *racionális szám*, $b \neq 0$, akkor az a számot **osztani** a b számmal azt jelenti, hogy az a számot szorozzuk a b szám inverzével, vagyis $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$.

Ha $a, b, \in \mathbb{Q}$, akkor $a + b \in \mathbb{Q}$, $a \cdot b \in \mathbb{Q}$, $a - b \in \mathbb{Q}$.

Ha $a, b, \in \mathbb{Q}$ és $b \neq 0$, akkor $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Példa.

Ha $a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{3}{5}$, akkor:

$$a + b = \frac{41}{10},\ a - b = \frac{29}{10},\ a \cdot b = \frac{21}{10},\ a : b = \frac{35}{6}$$

és az összes szám racionális.

Fedezzük fel, értsük meg!

Kiindulva az alábbi kérdésekből, fedezzük fel a valós számokkal végzett műveletek sajátosságait!

1) Milyen számot kapunk, ha összeadunk vagy szorzunk egy racionális számot egy irracionális számmal?

2) Milyen számot kapunk, ha összeadunk vagy szorzunk két irracionális számot?

Adjunk választ a fenti kérdésekre (némelyiket megállapítottuk az előző leckék példái alapján), majd bizonyítsunk be ezek közül néhányat

1) Az első kérdésre a válasz:

a) Ha $q \in \mathbb{Q}$ racionális szám és $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $q + \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Bizonyítás: Reductio ad absurdum: feltételezzük, hogy $q + \sqrt{x} = r \in \mathbb{Q}$. Akkor, $\sqrt{x} = r - q \in \mathbb{Q}$, ami ellentmondás, mert $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

A feltételezésünk hamis, tehát $q + \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Példák.

$2 + \sqrt{7}$; $3 - \sqrt{5}$ irracionális számok:

$2 \in \mathbb{Q}, \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2 + \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

$3 \in \mathbb{Q}, -\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 3 + \left(-\sqrt{5}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) Ha $q \in \mathbb{Q}^*$ racionális és $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $q \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Bizonyítás: Reductio ad absurdum: feltételezzük, hogy $q \cdot \sqrt{x} = r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{r}{q} \in \mathbb{Q}$, ellentmondás, mert $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tehát $q \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, bármely $q \in \mathbb{Q}^*$ és $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ esetén.

Példák: A $2\sqrt{7}$; $-3\sqrt{5}$; $-\frac{2}{7}\sqrt{12}$ irracionális számok:

$2 \in \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

$-3 \in \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow -3 \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

$-\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}^*$, $\sqrt{12} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow -\frac{2}{7} \cdot \sqrt{12} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Hasznos példa, ha egy nullától különböző természetes számot és egy irracionális szám szorzatát tekintjük.
Vegyük észre, hogy a $2\sqrt{5}$ felírható $\sqrt{5} + \sqrt{5}$, formában, majd $3\sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$. Ez alapján az $n \in \mathbb{N}^*$ természetes szám és egy $\sqrt{x}$ alakú irracionális szám szorzata: $n\sqrt{x} = \underbrace{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \ldots + \sqrt{x}}_{n \text{ tag}}$.

2) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Az irracionális szám nem más, mint egy végtelen, nem szakaszos tizedes szám, tehát az irracionális számokkal végzett műveletek eredményét egy sor egymást követő megközelítés alapján kapjuk meg.
Például a $\sqrt{3} = 1,732\ldots$ és $\sqrt{7} = 2,645\ldots$, irracionális számok esetén e számok **összege** $\sqrt{3} + \sqrt{7}$, ami nem más, mint a két számnak ugyanazzal a pontossággal (hiánnyal illetve többlettel) való közelítő értékének összege közötti szám.

$1 < \sqrt{3} < 2$		$2 < \sqrt{7} < 3$		$3 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 5$
$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$	és	$2,6 < \sqrt{7} < 2,7$	vagyis	$4,3 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4,5$
$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$		$2,64 < \sqrt{7} < 2,65$		$4,37 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4,39$
$1,732 < \sqrt{3} < 1,733$		$2,645 < \sqrt{7} < 2,646$		$4,377 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4,379$

Hasonlóképpen, két irracionális szám **szorzata** nem más, mint a két számnak ugyanazzal a pontossággal, (hiánnyal illetve többlettel) való közelítő értékének szorzata közötti szám.
A $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ alakot használjuk a $\sqrt{3}$ és $\sqrt{7}$ pontos összegének, valamint a pontos szorzatukat $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ vagy $\sqrt{21}$. alakban írjuk.
Vizsgáljuk meg, hogy két irracionális szám összege, illetve szorzata racionális vagy irracionális szám-e!

Példák: Ha $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$, $d = -\sqrt{2}$, irracionális számok, akkor $a + b = 3\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $b + d = 0 \in \mathbb{Q}$, majd $a \cdot b = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$ és $b \cdot c = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Következtetés:
Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $a + b$ és $a \cdot b$ racionális vagy irracionális szám is lehet.

Tanulmányozva a valós számok halmazán végzett műveletek értelmezését, megállapíthatjuk, hogy tulajdonságaik a racionális számok halmazán végzett műveletek tulajdonságaiból erednek.

Az összeadás asszociatív:
$(a + b) + c = a + (b + c)$, bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén.

$$\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) + \left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{5} + \left[\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right)\right]$$

Az összeadás kommutatív:
$a + b = b + a$, bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

$$\left(-\sqrt{2}\right) + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right)$$

Az összeadás semleges eleme: 0, vagyis:
$a + 0 = 0 + a = a$, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén.

$$0 + \left(1 - \sqrt{3}\right) = \left(1 - \sqrt{3}\right) + 0 = 1 - \sqrt{3}$$

Bármely $a \in \mathbb{R}$ számnak $-a \in \mathbb{R}$ az ellentettje, azaz $a + (-a) = (-a) + a = 0$, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén.

$$3\sqrt{7} + \left(-3\sqrt{7}\right) = \left(-3\sqrt{7}\right) + 3\sqrt{7} = 0$$

A szorzás asszociatív:
$(a \cdot b) \cdot c = a\,(b \cdot c)$, bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén.

$$(6{,}17 \cdot 25) \cdot 4 = 6{,}17 \cdot (25 \cdot 4)$$
$$\left(3 \cdot \sqrt{7}\right) \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot \left(\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}\right)$$

A szorzás kommutatív:
$a \cdot b = b \cdot a$, bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

$$\left(1 + \sqrt{5}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) = \left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$$

A szorzás semleges eleme 1, vagyis
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén.

$$1 \cdot \sqrt{6{,}8} = \sqrt{6{,}8} \cdot 1 = \sqrt{6{,}8}$$

Bármely $a \in \mathbb{R}^*$ számnak $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$ az inverze, vagyis $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

$$3\sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt{7}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt{7}}\right) \cdot 3\sqrt{7} = 1$$

A szorzás disztributív az összeadásra nézve:
$a(b + c) = ab + ac$ és $(a + b)c = ac + bc$, bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén.

$$9 \cdot \left(4 + \sqrt{2}\right) = 9 \cdot 4 + 9\sqrt{2}$$
$$\left(4 + \sqrt{3}\right)\sqrt{5} = 4\sqrt{5} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

Az irracionális számok összeadása és kivonása hasonló a racionális számokkal végzett műveletekhez, vagyis:
1) Bármely a és b valós szám esetén $a - b = a + (-b)$.
2) Bármely a és b valós szám esetén, ahol $b \neq 0$, igaz, hogy $a : b = a \cdot b^{-1}$ vagy $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

Alkalmazás

Ha $a, b \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $a + b\sqrt{x} = 0$, akkor $a = 0$ és $b = 0$.

Bizonyítás: Ha $b \neq 0$, akkor $a + b\sqrt{x} = 0 \Rightarrow b\sqrt{x} = -a \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ hamis, mert $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tehát $b = 0$.
Mivel $a + b\sqrt{x} = 0$, azt kapjuk, hogy $a = 0$.

Ha $a, b \in \mathbb{Q}$ és
$2a - 3 + (b - 8)\sqrt{5} = 0$,
akkor $2a - 3 = 0$ és $b - 8 = 0$.
Tehát $a = 1{,}5$ és $b = 8$.

Következtetés: Ha $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $a + b\sqrt{x} = a' + b'\sqrt{x}$, akkor $a = a'$ és $b = b'$.

Bizonyítás: $a + b\sqrt{x} = a' + b'\sqrt{x} \Rightarrow (a - a') + (b - b')\sqrt{x} = 0$
$\Rightarrow a - a' = 0$ és $b - b' = 0$, tehát $a = a'$ és $b = b'$.

Ha $a, b \in \mathbb{Q}$ és
$17 - b\sqrt{3} = a + 4\sqrt{3}$,
akkor $a = 17$ és $b = -4$.

Számítási szabályok a valós számok halmazán

Az $a + b\sqrt{x}$ alakú számok összege és különbsége, ha $x > 0$.

A valós számok **összeadása** asszociatív és kommutatív művelet, vagyis szabad megfelelő sorrendbe helyezni és csoportosítani a tagokat.

racionális tagok

$$9 + 5\sqrt{2} + 8 + 3\sqrt{2} + 7 = 24 + 8\sqrt{2}$$

irracionális tagok

Két szám **kivonása** nem más, mint egy szám és egy másik ellentettjének összege. Tehát a tagok megfelelő csoportosítása a kivonás esetén is elvégezhető. (Vigyázzunk a tagok előjelére!)

Egynevű tagok összeadása és kivonása:

$a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$ és $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$, $x>0$.

Két racionális tagot egynevű tagnak tekintünk.

Két, $a\sqrt{x}$ és $b\sqrt{x}$ alakba hozható tag egynevű tag,

ahol $a, b \in \mathbb{Q}$ és $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$7\sqrt{3}+8\sqrt{3}=15\sqrt{3}$ és $7\sqrt{3}-5\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

29 és 11 egynevű tagok

$5\sqrt{2}$ és $3\sqrt{2}$ egynevű tagok

29 és $5\sqrt{2}$ *nem* egynevű tagok

$\sqrt{7}$ és $\sqrt{5}$ *nem* egynevű tagok

Két nem egynevű tag összeadásának illetve különbségének eredményét csak közelítés alapján adhatjuk meg. $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ nem írható $a\sqrt{x}$ alakba, de megközelítve $\sqrt{3}+\sqrt{7}\approx 1,73+2,64=4,37$.

Az $a\sqrt{x}$ alakú számok szorzása és osztása:
Ha $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $x \geq 0$ és $y > 0$, akkor:

$a\sqrt{x}\cdot b\sqrt{y}=ab\sqrt{xy}$ és $\dfrac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$;

Példák:

$6\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}=18\sqrt{10}$; $\quad \dfrac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{6}{3}\sqrt{\dfrac{5}{2}}=2\sqrt{2,5}$

racionális tényezők

$4\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{3}=24\sqrt{15}$

irracionális tényezők

Jegyezd meg!

• Az x valós szám ellentettje $-x$.	$x+(-x)=(-x)+x=0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.
• Az nullától különböző x valós szám inverze $\dfrac{1}{x}$.	$x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot x=1$, bármely $x \in \mathbb{R}^*$ esetén.
• Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, $x-y=x+(-y)$.	Bármely $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ esetén $x : y = x \cdot \dfrac{1}{y}$
• A közös tényező kiemelése (a szorzás disztributív tulajdonságának következménye):	$ab+ac=a(b+c)$ és $ab-ac=a(b-c)$, bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$
• A zárójel előtt található mínuszjel, megváltoztatja a zárójelben levő tagok előjelét (ugyanaz, mintha -1 és a zárójelben levő összegre alkalmaznánk a szorzás disztributív tulajdonságát).	$-(a-b+c)=-a+b-c$, bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén.
• Két, azonos előjelű valós szám szorzata *pozitív*.	Ha $x, y, \in \mathbb{R}^*$, akkor $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$ és $x\cdot(-y)=(-x)\cdot y=-x$;
• Két, *ellentétes előjelű* valós szám szorzata *negatív*.	$-\dfrac{x}{y}=\dfrac{-x}{y}=\dfrac{x}{-y}$ és $\dfrac{-x}{-y}=\dfrac{x}{y}$.
• Ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ és $x \geq 0$, akkor $a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$ és $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)\sqrt{x}$	Ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ és $x \geq 0$ és $y > 0$, akkor $a\sqrt{x}\cdot b\sqrt{y}=ab\sqrt{xy}$ és $\dfrac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Végezd el!

a) $-1{,}2 + 3{,}6$; c) $-\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}$;

b) $-4{,}3 - (-2{,}95)$; d) $-\frac{7}{3}-\left(-2{,}(3)\right)$.

2. Végezd el!

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$; g) $\sqrt{6}+2\sqrt{6}+3\sqrt{6}$;

b) $2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$; h) $4\sqrt{10}-3\sqrt{10}-3\sqrt{10}$;

c) $\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)$; i) $4\sqrt{2}+\left(-3\sqrt{2}\right)+\left(-5\sqrt{2}\right)$;

d) $\sqrt{5}-\sqrt{5}$; j) $2\sqrt{3}-\left(-3\sqrt{3}\right)-\left(-4\sqrt{3}\right)$;

e) $7\sqrt{7}-2\sqrt{7}$; k) $8\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{5}$.

f) $\sqrt{6}-3\sqrt{6}$;

3. Végezd el a számításokat, majd határozd meg az eredményt kéttizedes pontossággal!

a) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-10\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$;

b) $9\sqrt{3}-7\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}-7\sqrt{3}$;

c) $4\sqrt{5}+\left(6\sqrt{5}-11\sqrt{5}\right)$;

d) $-10\sqrt{7}-\left(19\sqrt{7}-6\sqrt{7}-22\sqrt{7}\right)$.

4. Határozd meg $x+y$ és $x-y$ értékeit az alábbi esetekben:

a) $x=3\sqrt{5}+2\sqrt{2}$, $y=8\sqrt{2}-5\sqrt{5}$;

b) $x=7\sqrt{3}-8\sqrt{6}$, $y=3\sqrt{3}+7\sqrt{6}$;

c) $x=2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{5}$, $y=4\sqrt{5}-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

5. Tanulmányozd, hogy az $x+y+z$ összeg racionális szám-e?

a) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $y=-2\sqrt{3}+8\sqrt{2}$,
$z=-9\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

b) $x=2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$, $y=6\sqrt{3}-7\sqrt{5}-8\sqrt{2}$,
$z=2\sqrt{5}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}$.

6. Végezd el!

a) $1+\left(2+\sqrt{3}\right)$; c) $7+\left(\sqrt{5}-7\right)$;

b) $4-\left(3+\sqrt{2}\right)$; d) $3^2-\left(\sqrt{11}+9\right)$;

e) $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\left(-3\sqrt{2}\right)+\left(-4\sqrt{3}\right)$;

f) $\left(3\sqrt{5}-5\right)+7+\left(-2\sqrt{5}-6\right)+\sqrt{5}+4$.

7. Tudva, hogy $x=1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$,
$y=4\sqrt{2}-5\sqrt{3}+6$, $z=2\sqrt{3}-6\sqrt{2}-21$,
mutasd ki, hogy az $x+y+z$ összeg egész szám!

8. Számítsd ki az AB szakasz hosszát tudva, hogy $x_A=-\sqrt{2}+1$ és $x_B=\sqrt{2}+1$ a végpontok abszcisszái. Ábrázold valós számtengelyen a szakaszt!

9. Emeld ki a tényezőket a gyökjel alól, majd végezd el a számításokat!

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$;

b) $\sqrt{3}+\sqrt{12}$;

c) $\sqrt{5}-\sqrt{20}$;

d) $3\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$;

e) $7\sqrt{3}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$;

f) $\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{175}$.

10. Határozd meg $x+y$ és $x-y$ értékét az alábbi esetekben:

a) $x=\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{27}$ és
$y=\sqrt{48}+\sqrt{98}-\sqrt{200}$;

b) $x=\sqrt{49}-3\sqrt{20}+\sqrt{28}$ és
$y=\sqrt{180}-\sqrt{112}+\sqrt{64}$.

11. a) Számítsd ki az AB, BC, CD szakaszok hosszát tudva, hogy a számtengelyen ábrázolva adottak a következő koordináták:
$A\left(\sqrt{2}\right)$, $B\left(\sqrt{3}\right)$, $C\left(\sqrt{8}\right)$, $D\left(2\sqrt{3}\right)$;

b) Egészítsd ki a $<$, $=$, $>$ szimbólumok valamelyikével úgy, hogy igaz kijelentést kapj:
$AB+BC+CD$ ... 2.

12. Végezd el a szorzásokat!

a) $5\cdot 0{,}44$; d) $\frac{5}{3}\cdot\left(-6\sqrt{2}\right)$;

b) $-\frac{7}{3}\cdot\left(-1\frac{2}{7}\right)$; e) $\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot\left(-\frac{27}{2}\right)$;

c) $-9\cdot 1{,}(3)$; f) $\left(4^2-16\right)\cdot 3\sqrt{3}$.

13. Végezd el a szorzásokat!

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}$;

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$; e) $\left(-\sqrt{13}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right)$;

c) $\sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{7}\right)$; f) $-\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{5}\right)$.

14. Végezd el a szorzásokat, majd tanulmányozd, hogy a szorzat racionális vagy irracionális szám!

a) $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$;

b) $\left(-3\sqrt{3}\right)\cdot\left(5\sqrt{5}\right)$;

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$;

d) $6\sqrt{3}\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)$;

e) $\left(-7\sqrt{2}\right)\cdot\left(-2\sqrt{5}\right)$;

f) $\left(0{,}3\sqrt{3}\right)\cdot\left(10\sqrt{10}\right)$;

g) $\frac{1}{2}\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$;

h) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\left(-6\sqrt{2}\right)$;

i) $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}$;

j) $\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{5}{3\sqrt{2}}$;

k) $\frac{\sqrt{3}}{10}\left(-\frac{20}{2\sqrt{3}}\right)$;

l) $\frac{\sqrt{5}}{25}\cdot\frac{5}{2\sqrt{5}}$.

15. Számítsd ki az $x\cdot y$ szorzatot!

a) $x=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}$ és $y=16\sqrt{3}-11\sqrt{3}$;

b) $x=-8\sqrt{2}+\sqrt{50}$ és $y=\sqrt{32}+\sqrt{8}$;

c) $x=\sqrt{63}-3\sqrt{28}$ és $y=\sqrt{20}-2\sqrt{45}$.

16. Bizonyítsd be, hogy az
$A=1{,}(2)\cdot\sqrt{24}\cdot\left(-1{,}2\cdot\sqrt{12}\right)\cdot\left(-\frac{10}{11}\cdot\sqrt{8}\right)$ egy racionális szám köbe!

17. Mutasd ki, hogy a $B=\sqrt{2^{50}+2^{50}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{512^{3}}$ természetes szám!

18. Számold ki, használva a szorzás disztributív tulajdonságát az összeadásra és kivonásra nézve!

a) $2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$;

b) $3\cdot\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$;

c) $\sqrt{2}\cdot\left(5+\sqrt{2}\right)$;

d) $\frac{8\sqrt{5}}{3}\cdot\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}-\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$;

e) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$;

f) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$;

g) $2\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$;

h) $-5\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{8}\right)$.

19. Végezd el a számításokat!

a) $6{,}(3):(-38)$

b) $-1\frac{3}{4}:\left(-4\frac{2}{3}\right)$;

c) $4\sqrt{2}:2$;

d) $20\sqrt{3}:(-4)$;

e) $-0{,}5\sqrt{5}:5$.

20. Végezd el!

a) $\sqrt{50}:\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{15}:\left(-\sqrt{3}\right)$;

c) $-\sqrt{35}:\left(-\sqrt{7}\right)$;

d) $4\sqrt{21}:\sqrt{7}$;

e) $\left(-9\sqrt{14}\right):\sqrt{2}$;

f) $\left(16\sqrt{42}\right):\left(-8\sqrt{7}\right)$.

21. Számítsd ki annak a négyzetnek a területét, melynek kerülete $\sqrt{512}$ cm!

22. Határozd meg azokat az $\overline{ab}$ kétjegyű természetes számokat, melyek tulajdonsága $\sqrt{a}=\frac{b}{4}$.

23. Számítsd ki az $x:y$ értékét, ha:

a) $x=7\sqrt{10}-25\sqrt{10}$ és $y=3\sqrt{2}-12\sqrt{2}$;

b) $x=4\sqrt{60}-\sqrt{135}$ és $y=-\sqrt{375}$;

c) $x=\sqrt{24}-\frac{\sqrt{54}}{2}+\frac{\sqrt{150}}{4}$ és $y=-\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{16}}$.

24. Hasonlítsd össze az

$a=\left(\sqrt{32}+\sqrt{128}+\sqrt{288}\right):4$ és

$b=\sqrt{32}:4+\sqrt{128}:4+\sqrt{288}:4$ számokat!

25. Végezd el a számításokat!

a) $\left(20\sqrt{2}-30\sqrt{3}\right):10$;

b) $\left(14\sqrt{2}+21\sqrt{8}\right):\left(-7\sqrt{2}\right)$;

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2^{3}}+\sqrt{2^{5}}+\sqrt{2^{7}}+\sqrt{2^{9}}\right):\sqrt{2}$;

d) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{3^{3}}+\sqrt{3^{5}}-\sqrt{3^{7}}\right):\left(-\sqrt{3}\right)$;

e) $\sqrt{6^{10}+6^{10}+6^{11}}:\sqrt{3^{10}+3^{10}+3^{11}+3^{11}}$.

26. a) Követve az alábbi megoldott példát, azonosítsd az összeadás és szorzás felhasznált tulajdonságait:

$$\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(4+7\sqrt{2}\right)=\left(5+2\sqrt{3}\right)\cdot4+\left(5+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(7\sqrt{2}\right)=5\cdot4+\left(2\sqrt{3}\right)\cdot4+5\cdot\left(7\sqrt{2}\right)+\left(2\sqrt{3}\right)\cdot\left(7\sqrt{2}\right)=$$
$$=20+8\sqrt{3}+35\sqrt{2}+14\sqrt{6}.$$

b) Számítsd ki az $x\cdot y$, szorzatot, ha $x=5+2\sqrt{6}$ és $y=5-2\sqrt{6}$. Alkalmazd a szorzás disztributív tulajdonságát az összeadásra és kivonásra nézve, és kövesd a fenti példát!

c) Írd le az x és y számok inverzét, behelyettesítve a b) alpontban kapott eredményeket.

2. l. Valós számok hatványozása

Értelmeztük minden nullától különböző racionális szám egész kitevőjű hatványát, majd megadtuk és alkalmaztuk ennek tulajdonságait (hatványokkal végzett számítási szabályok). A 0 esetén a nullától különböző természetes kitevőjű hatványait értelmeztük. Észrevettük, hogy a valós számok szorzásának tulajdonságai megegyeznek a racionális számok szorzásának tulajdonságaival.

Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés: Az $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}^*$ esetén, az $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}$ valós számot az a szám n-dik **hatványának** nevezzük.

Az a számot a hatvány **alapjának**, az n számot pedig a hatvány kitevőjének nevezzük.

Ha $a = 0$, akkor $0^n = 0$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.
Az 0^0 **értelmetlen**.

$2^5 = 32$ ← hatvány

alap, kitevő

Ha $a \in \mathbb{R}^*$, akkor $\frac{1}{a} \overset{jel}{=} a^{-1}$ és $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A racionális számok esetén tanult egész kitevőjű hatványokkal végzett számítási szabályok használhatóak a valós számok halmazán is.

$x^1 = x$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén — $\sqrt{7}^1 = \sqrt{7}$; $\left(-\sqrt{2}\right)^1 = -\sqrt{2}$; $\left(4-\sqrt{5}\right)^1 = 4-\sqrt{5}$

$x^0 = 1$ bármely $x \in \mathbb{R}^*$ esetén — $\sqrt{17}^0 = 1$; $\left(3-2\sqrt{5}\right)^0 = 1$; $\left(-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^0 = 1$

$0^n = 0$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén — $0^2 = 0$; $0^{2019} = 0$

Az $a, b \in \mathbb{R}^*$ és $n, p \in \mathbb{Z}$ esetén: $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ $\quad (a^n)^p = a^{n \cdot p}$ $\quad a^n : a^p = a^{n-p}$ vagy $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\quad a^n : b^n = (a : b)^n$ vagy $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Az $a, b \in \mathbb{R}^*$ számok esetén a fenti tulajdonságokat részben ebben a leckében alkalmazzuk, majd kiegészítjük a következő tanévekben.

Alkalmazás

Adott az $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy x és n nem lehet egyidejűleg nulla.

$\sqrt{x}^2 = x$, bármely $x \geq 0$ esetén; — $\left(\sqrt{17}\right)^2 = 17$, $\left(\sqrt{2+8\sqrt{3}}\right)^2 = 2+8\sqrt{3}$

$\left(\sqrt{x}\right)^n = \sqrt{x^n}$, bármely $x \geq 0$ esetén; — $\left(\sqrt{3}\right)^{11} = \sqrt{3^{11}}$; $\sqrt{7^2} = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

$\sqrt{x^n} = \sqrt{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^n$ — $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} = \left|3-\sqrt{5}\right| = 3-\sqrt{5}$

Ha $n = 2k$ (páros szám), akkor
$\left(\sqrt{x}\right)^n = \left(\sqrt{x}\right)^{2k} = \sqrt{x^{2k}} = x^k$, bármely $x \geq 0$ esetén. — $\left(\sqrt{3}\right)^8 = 3^4$; $\left(\sqrt{0{,}2}\right)^6 = 0{,}2^3$

Ha $n = 2k+1$ (páratlan szám), akkor
$\left(\sqrt{x}\right)^n = \left(\sqrt{x}\right)^{2k+1} = \sqrt{x^{2k+1}} = x^k\sqrt{x}$, bármely $x \geq 0$ esetén. — $\left(\sqrt{5}\right)^9 = \left(\sqrt{5}\right)^8 \cdot \sqrt{5} = 5^4\sqrt{5} = 625\sqrt{5}$

$\left(a\sqrt{x}\right)^n = a^n\left(\sqrt{x}\right)^n$, bármely $x \geq 0$ és $a \in \mathbb{R}$

$\left(3\sqrt{2}\right)^4 = 3^4\sqrt{2}^4 = 3^4 \cdot 2^2 = 81 \cdot 4 = 324;$

$\left(2\sqrt{5}\right)^5 = 2^5\sqrt{5}^5 = 32 \cdot 5^2\sqrt{5} = 800\sqrt{5}.$

Ha $n = 2k$ (páros szám), akkor $(-x)^n = x^n$ bármely $x \in \mathbb{R}^*$ esetén

$\left(-\sqrt{3}\right)^{28} = \sqrt{3}^{28}$

Ha $n = 2k + 1$ (páratlan szám), akkor $(-x)^n = -x^n$ bármely $x \in \mathbb{R}^*$ esetén

$\left(-\sqrt{6}\right)^{75} = -\sqrt{6}^{75}$

Ha $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$.	$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\left(\sqrt{5}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $(-8)^{-1} = \dfrac{1}{-8}$	$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$\left(5\sqrt{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(5\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1}{75}$

Jegyezd meg!

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, bármely $x \geq 0$ esetén.

$\left(\sqrt{x}\right)^n = \sqrt{x^n}$, bármely $x \geq 0$ esetén.

$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, bármely x, nullától különböző valós szám esetén.

Ha $n = 2k$ (páros szám), akkor $(-x)^n = x^n$ bármely $x \in \mathbb{R}^*$ esetén.

Ha $n = 2k + 1$ (páratlan szám), akkor $(-x)^n = -x^n$ bármely $x \in \mathbb{R}^*$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Egészítsd ki úgy, hogy az alábbi kijelentések igazak legyenek!:

a) Ha $x \in \mathbb{Q}$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor $x^n \in \ldots$;

b) Ha $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor $x^n \in \ldots$ vagy $x^n \in \ldots$

c) Ha $x = a\sqrt{b}$, $b \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}^*$, akkor $x^n = \ldots$

d) Ha $a \geq 0$ és $x = \sqrt{a}$, akkor $x^2 = \ldots$

e) Az a) – d) kijelentéseket ellenőrizd egy-egy példával!

2. Számítsd ki:

a) 13^2; c) $\left(\dfrac{7}{3}\right)^2$; e) $(-4{,}63)^1$;

b) $(-2)^4$; d) $(-2)^3$; f) $\left[1 + \dfrac{7}{2} + 5{,}(7)\right]^0$.

3 Számítsd ki:

a) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; d) $\left(\sqrt{3}\right)^5$; g) $-\sqrt{4^2}$;

b) $\left(-\sqrt{5}\right)^2$; e) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; h) $\left(-\sqrt{6}\right)^6$;

c) $\left(\sqrt{2}\right)^3$; f) $\left(-3\sqrt{5}\right)^3$; i) $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2$.

4. Számítsd ki x^2 értékét, ha:

a) $x = \sqrt{2} + \sqrt{8}$;

b) $x = 2\sqrt{500} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{1500}$;

c) $x = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{45}$.

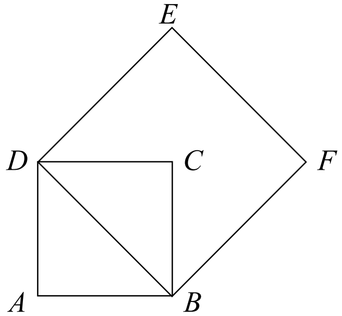
5. Határozd meg az a, b, c természetes számokat tudva, hogy igaz a következő kijelentés:

$\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 + \ldots + \sqrt{2}^9 + \sqrt{2}^{10} = a \cdot \left(b + \sqrt{c}\right)$.

6. A mellékelt ábrán $ABCD$ és $BDEF$ négyzet, valamint $AB = 2\sqrt{3}$.

a) Számítással bizonyítsd be, hogy $\mathcal{T}_{BDEF} = 2 \cdot \mathcal{T}_{ABCD}$

b) Végezd el újra a számításokat, ha $AB = a$, $a \in \mathbb{R}_+$, majd igazold, hogy az egyenlőség igaz bármely pozitív a valós szám esetén.



3.ℓ. Az $a\sqrt{b}$ alakú nevező gyöktelenítése

Ha x nullától különböző valós szám, a és b nullától különböző természetes szám, valamint b nem osztható 1-től különböző négyzetszámmal, akkor a gyakorlatban néha szükséges, hogy az $\dfrac{x}{a\sqrt{b}}$, alakú törtet olyan egyenértékű törttel cseréljük ki, melynek **nevezője racionális szám**. Hasonlóan, ha a számítások eredménye irracionális szám, akkor **racionális nevezőjű törtként** írjuk fel.

Emlékeztető

1) Az adott törttel egyenértékű törteket kapunk, ha nullától különböző számmal bővítjük vagy egyszerűsítjük.
2) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$, bármely $x\geq 0$ esetén. $\quad\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7;\quad \left(2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=2\cdot 2=4.$
3) $\sqrt{x}:\sqrt{x}=1$, bármely $x>0$ esetén. $\quad\sqrt{7}:\sqrt{7}=1;\quad 2\cdot\sqrt{2}:\sqrt{2}=2\cdot\left(\sqrt{2}:\sqrt{2}\right)=2.$

Kiemelve a tényezőket a gyökjel alól, a $\sqrt{n}$ szám $a\sqrt{b}$ alakba írható, ahol $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ és b négyzetmentes szám.

Fedezzük fel, értsük meg!

Ha a nevező $a\sqrt{b}$ alakú, ahol $a,b\in\mathbb{N}^*$, akkor a törtet $\sqrt{b}$ -vel bővítve a nevező természetes, tehát racionális szám lesz.

$${}^{\sqrt{b})}\frac{1}{a\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{ab},\ a,b\in\mathbb{N}^*$$

Megjegyzés: Általában, a fenti relációban a b négyzetmentes szám (már nem emelhető ki tényező a gyökjel alól). Ez viszont nem kötelező, csupán a számítások egyszerűbb elvégzése miatt, valamint az eredmény szebb alakjának leírására használják.

Egy tört átalakítását olyan egyenértékű törtté, melynek nevezője racionális szám, a **nevező gyöktelenítésének** nevezzük.

$${}^{\sqrt{30})}\frac{1}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{30},\quad {}^{\sqrt{2})}\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

A törtek nevezőjének gyöktelenítése hasznos olyan műveletek elvégzésekkor, amikor irracionális nevezőjű törteket hasonlítunk össze és rendezünk.

Alkalmazás

Ha b négyzetmentes szám, a $\dfrac{c}{a\sqrt{b}}$ törtet, nevezőjének gyöktelenítése céljából, $\sqrt{b}$ -vel bővítjük

$${}^{\sqrt{3})}\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};\quad {}^{\sqrt{7})}\frac{7}{5\sqrt{7}}=\frac{7\sqrt{7}}{5\cdot 7}=\frac{\sqrt{7}}{5}$$

Ha b nem négyzetmentes szám, akkor a nevező gyöktelenítését az alábbi lépéseket követve végezzük el:

I. lépés – kiemeljük a tényezőket a gyökjel alól és a nevezőt $a'\sqrt{b'}$ alakba írjuk, ahol b' négyzetmentes szám;

$$\frac{1}{5\sqrt{18}}=\frac{1}{5\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{15\sqrt{2}};$$

II. lépés – a törtet $\sqrt{b'}$ -vel bővítjük.

$${}^{\sqrt{2})}\frac{1}{15\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{15\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{30},\ \text{tehát}\ \frac{1}{5\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}}{30}.$$

Ha törteket kell összeadni vagy kivonni, akkor a közös nevezőre hozás előtt előnyösebb a törtek nevezőjét gyökteleníteni.

$${}^{\sqrt{3})}\frac{1}{2\sqrt{3}}+{}^{\sqrt{5})}\frac{2}{3\sqrt{5}}={}^{5)}\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}+{}^{3)}\frac{\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{30}$$

Ha törteket kell szorozni vagy osztani, akkor a nevezők gyöktelenítése előtt előnyösebb a műveletet elvégezni (néhány nevező racionális számmá válhat).

$$\frac{2}{5\sqrt{15}}\cdot\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{14}{5\sqrt{90}}=\frac{^{\sqrt{10})}14}{5\cdot3\sqrt{10}}=\frac{14\sqrt{10}}{150}=\frac{7\sqrt{10}}{75}$$

$$\frac{16}{3\cancel{\sqrt{5}}}\cdot\frac{7\cancel{\sqrt{5}}}{12}=\frac{16\cdot7^{(4}}{3\cdot12}=\frac{4\cdot7}{3\cdot3}=\frac{28}{9}$$

Jegyezd meg!

Egy tört átalakítását olyan egyenértékű törtté, melynek nevezője racionális szám, a **nevező gyöktelenítésének** nevezzük.

$$\frac{^{\sqrt{b})}1}{a\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{ab},\ a,b\in\mathbb{N}^*$$

Gyakorlatok és feladatok

1. Bővítsd az alábbi törteket úgy, hogy a nevező racionális legyen!

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{-5}{\sqrt{5}},\ \frac{9}{\sqrt{6}},\ \frac{10}{\sqrt{10}},\ \frac{-24}{\sqrt{30}}.$$

2. Emeled ki a tényezőket a gyökjel alól, ha lehetséges egyszerűsítsd a törtet, majd gyöktelenítsd a nevezőt!

$$\frac{3}{\sqrt{8}},\ \frac{6}{\sqrt{12}},\ -\frac{8}{\sqrt{20}},\ \frac{2}{\sqrt{24}},\ \frac{16}{\sqrt{32}},\ \frac{4}{\sqrt{28}},\ \frac{2a}{\sqrt{a^2\cdot b}},$$

ahol $a>0$ és $b>0$.

3. Gyöktelenítsd a törtek nevezőjét!

$$\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},\ \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}},\ -\frac{7\sqrt{15}}{\sqrt{20}},\ \frac{8\sqrt{15}}{\sqrt{20}},\ \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{125}},\ \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{63}},\ \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}.$$

4. Írd racionális nevezőjű törtek alakjába az alábbi valós számokat!

$$\sqrt{3\frac{1}{5}},\ \sqrt{0{,}8(3)},\ \sqrt{10\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{81}{24}},\ \sqrt{\frac{27}{2}},\ \sqrt{\sqrt{\frac{400}{121}}},\ \sqrt{\frac{a^2b}{b^3c}},$$

ahol $b\neq0$ és $c>0$.

5. Gyöktelenítsd a nevezőket, majd hasonlítsd össze az x és y számot:

a) $x=\frac{4}{\sqrt{2}}$ és $y=\sqrt{10}$;

b) $x=-\frac{12}{\sqrt{3}}$ és $y=-\frac{10}{\sqrt{2}}$;

c) $x=\frac{7}{\sqrt{7}}+\sqrt{28}$ és $y=\frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$.

6. Végezd el a számításokat, és az eredményt írd racionális nevezőjű tört alakjába!

a) $\frac{7}{2\sqrt{6}}-\frac{4}{3\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{6}}$;

b) $\frac{2}{3\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{8}}-\left(-\frac{3}{\sqrt{18}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{3\sqrt{5}}+\frac{3}{5\sqrt{5}}$;

d) $\frac{3\sqrt{5}}{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

7. Számítsd ki:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}}+\frac{3}{\sqrt{18}}$;

b) $\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{12}}+\frac{9}{\sqrt{27}}$;

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{20}}+\frac{1}{\sqrt{45}}-\frac{1}{\sqrt{125}}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{38}\right)$;

d) $\left(\sqrt{54}-\frac{6}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\frac{48}{\sqrt{6}}-\frac{15}{\sqrt{24}}\right)$.

8. Végezd el a számításokat és bizonyítsd be, hogy az $A=\left(\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{48}}-\frac{5}{\sqrt{108}}\right)\cdot\frac{\sqrt{27}}{10}$ racionális szám.

9. Határozd meg az a és b nullától különböző természetes számokat, ha $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$.

4.l. Műveletek elvégzésének sorrendje

A számítások során használt műveletek tulajdonságainak helyes alkalmazása érdekében olyan algoritmust használunk, amely a műveletek elvégzésének sorrendjét adja meg. A valós számokkal (mint minden más szám esetén is) végzett számítások eredményének helyessége függ az algoritmus szigorú betartásától.

Fedezzük fel, értsük meg!

A. Ha a gyakorlat **nem tartalmaz zárójelet**, akkor:

1) elvégezzük a hatványozásokat és a négyzetgyökvonást, ha lehetséges;

2) elvégezzük a szorzást és osztást a megadott sorrendben;

3) elvégezzük az összeadást és a kivonást a megadott sorrendben.

Megjegyzés: a) A hatványokkal végzett műveletek, a tényezők gyökjel alóli kiemelése és a tényezők gyökjel alá vitele már az 1) lépés előtt elvégezhetők, vagy a megoldási folyamat bármelyik lépésében, ha egyszerűbbé szeretnénk tenni a számításokat.

b) A törtek nevezőjét bármikor gyökteleníthetjük a feladat megoldása során, ha szükséges. Amennyiben a nevező gyöktelenítése nem vezet előnyösebb helyzethez, akkor csak a számítások végén alkalmazzuk azért, hogy az eredményt szebb alakban írjuk le.

B. Ha a gyakorlat zárójeleket is tartalmaz, akkor:

1) a kerek zárójelben levő műveleteket végezzük el, az A pontban bemutatott lépéseket követve;

2) a szögletes zárójeleket kerek zárójellé, a kapcsos zárójeleket pedig szögletes zárójellé változtatjuk;

3) az új kerek zárójelben levő műveleteket végezzük el, az A pontban bemutatott lépéseket követve.

Addig folytatjuk míg az összes zárójel eltűnik, majd elvégezzük a műveleteket.

Alkalmazás

1. példda. Számítsd ki: $4\cdot(-0{,}5)^3+\sqrt{22}^2:11-9:\left(-\sqrt{6}\right)^4$

1. lépés: $4\cdot(-0{,}5)^3+\sqrt{22}^2:11-9:\left(-\sqrt{6}\right)^4=$ $=4\cdot(-0{,}125)+22:11-9:36=$	Elvégezzük a hatványozásokat: $(-0{,}5)^3=-0{,}125$; $\sqrt{22}^2=22$ és $\left(-\sqrt{6}\right)^4=36$
2. lépés: $=4\cdot(-0{,}125)+22:11-9:36=$ $=-0{,}5+2-0{,}25=$	Elvégezzük a szorzást és osztást a megadott sorrendben: $4\cdot(-0{,}125)=-0{,}5$; $22:11=2$ és $9:36=0{,}25$
3. lépés: $=1{,}5-0{,}25=1{,}25$	Elvégezzük az összeadást és a kivonást a megadott sorrendben.

2. példa. Számítsd ki a kifejezés értékét:

$E=5\sqrt{12}+42:\sqrt{196}-2\sqrt{15}:\sqrt{20}+\sqrt{25}$	1) A négyzetszámokból négyzetgyököt vonunk: $\sqrt{196}=14$ és $\sqrt{25}=5$. Kiemeljük a tényezőket a gyökjel alól: $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Bevisszük a tényezőket a gyökjel alá: $2\sqrt{15}=\sqrt{60}$.
$E=5\cdot2\sqrt{3}+42:14-\sqrt{60}:\sqrt{20}+5$	2) Elvégezzük a szorzás és osztásokat: $5\cdot2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$; $42:14=3$; $\sqrt{60}:\sqrt{20}=\sqrt{3}$

$E = 10\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + 5$ — 3) Csoportosítva a racionális illetve irracionális számokat, elvégezzük az összeadást és kivonást.

$E = 8 + 9\sqrt{3}$ — Megkapjuk a végső eredményt.

3. példa. Számítsd ki az $E = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}^3 - \sqrt{17}^8 : \sqrt{17}^6 - \left(\sqrt{3}^{12}\right)^4 : 3^{23}$ kifejezés értékét.

- A hatványokkal végzett műveletekkel kezdjük: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}^3 = \sqrt{5}^4$; $\sqrt{17}^8 : \sqrt{17}^6 = \sqrt{17}^2$ és $\left(\sqrt{3}^{12}\right)^4 = \sqrt{3}^{48}$

tehát $E = \sqrt{5}^4 - \sqrt{17}^2 - \sqrt{3}^{48} : 3^{23}$.

- Elvégezzük a hatványozásokat: $\sqrt{5}^4 = 25$; $\sqrt{17}^2 = 17$; $\sqrt{3}^{48} = 3^{24}$ tehát $E = 5^2 - 17 - 3^{24} : 3^{23}$.
- A hatványokkal végzett műveletekkel folytatjuk: $3^{24} : 3^{23} = 3$ tehát $E = 25 - 17 - 3 = 5$.

Ez a példa rávilágít arra, hogy a hatványokkal végzett műveleteket a feladat megoldása során bármikor elvégezhetjük.

4. példa.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} + \dfrac{7}{\sqrt{5}} - \dfrac{19}{\sqrt{5}} = \dfrac{^{\sqrt{5})}-9}{\sqrt{5}} = \dfrac{-9\sqrt{5}}{5}$;

b) $\dfrac{^{6)}5}{\sqrt{3}} - \dfrac{^{3)}7}{2\sqrt{3}} + \dfrac{^{2)}1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{^{\sqrt{3})}11}{6\sqrt{3}} = \dfrac{11\sqrt{3}}{18}$

c) $\dfrac{^{\sqrt{3})}4}{\sqrt{3}} - \dfrac{7\sqrt{3}}{6} = \dfrac{^{2)}4\sqrt{3}}{3} - \dfrac{7\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

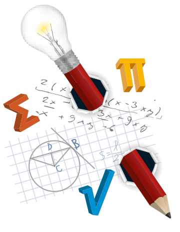
d) $\dfrac{^{\sqrt{2})}10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{^{\sqrt{6})}12}{\sqrt{6}} = \dfrac{10\sqrt{6}}{2} + \dfrac{12\sqrt{6}}{6} =$
$= 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$

Megjegyzés:
a) A hatványokkal végzett műveletek, a tényezők gyökjel alóli kiemelése és a tényezők gyökjel alá vitele már a számítások előtt elvégezhető, vagy a megoldási folyamat bármelyik lépésében, amennyiben egyszerűbbé szeretnénk tenni a számításokat.
b) A törtek nevezőjének gyöktelenítését a megoldási folyamat bármelyik pillanatában elvégezhetjük, ha szükséges. Javasolt az eredményt racionális nevezőjű tört alakjába írni, valamint a racionális szorzótényezőt irreducibilis alakba hozni.

Jegyezd meg!

A. Ha a gyakorlat **nem tartalmaz zárójelet**, akkor:
1) elvégezzük a hatványozásokat és a négyzetgyökvonást, ha lehetséges:
2) elvégezzük a szorzást és osztást a megadott sorrendben.
3) elvégezzük az összeadást és a kivonást a megadott sorrendben.

B. Ha a gyakorlat zárójeleket is tartalmaz, akkor:
1) a kerek zárójelben levő műveleteket végezzük el, az **A** pontban bemutatott lépéseket követve;
2) a szögletes zárójeleket kerek zárójellé, a kapcsos zárójeleket pedig szögletes zárójellé változtatjuk;
3) folytatjuk az algoritmust, míg megkapjuk a végső eredményt.



Gyakorlatok és feladatok

1. Figyelembe véve a műveletek elvégzésének sorrendjét, számítsd ki:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}$;

b) $\sqrt{26}:\sqrt{13}-2\sqrt{10}:\sqrt{5}$;

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}:\sqrt{10}$;

d) $3\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)+2\left(\sqrt{7}-3\right)$;

e) $2\sqrt{3}+\left(3\sqrt{6}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}\right)$;

f) $\left(2\sqrt{2}\right)^3+40\sqrt{6}:\left(-2\sqrt{3}\right)$.

2. Figyelembe véve a műveletek elvégzésének sorrendjét, számítsd ki:

a) $\sqrt{6^2\cdot 8^2}-\sqrt{6^2+8^2}$

b) $\sqrt{0,4}-\sqrt{1,6}+\sqrt{0,9}$

c) $\sqrt{0,04}-\sqrt{1,69}+\sqrt{0,25}$

d) $\sqrt{0,(2)}-\sqrt{0,(8)}+\sqrt{3,(5)}$

e) $\left(\sqrt{(-2)^{38}}+\sqrt{2^{38}}\right):16^{\sqrt{25}}$

f) $\sqrt{2^{2048}}-2^{2^{10}}+\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}-\frac{7}{9}\right):\sqrt{2\cdot\frac{8}{9}}$

g) $2\sqrt{15}+2\sqrt{5}\cdot\left[9\sqrt{2}-3\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\right]$

h) $\dfrac{\sqrt{(39\cdot 46+41\cdot 43)^2}+\sqrt{(39\cdot 46-41\cdot 43)^2}}{13\cdot 23}$

3. Figyelembe véve a műveletek elvégzésének sorrendjét, számítsd ki:

a) $2\sqrt{3}\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{12}\right)-\sqrt{96}$;

b) $2\sqrt{8}\cdot\left(\sqrt{200}-\sqrt{648}+\sqrt{162}\right)$;

c) $3\sqrt{20}+2\sqrt{5}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)-8\sqrt{5}+3\sqrt{10}$;

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{4}-\sqrt{56}:\sqrt{7}$;

e) $0,5\sqrt{24}-\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)+\sqrt{54}:\left(3\sqrt{2}\right)$;

f) $\left(-\sqrt{40}-\sqrt{90}+2\sqrt{250}\right)^3:\left(-\sqrt{3125}\right)$;

g) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}:\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{0,1(6)}:\left(2\sqrt{2}\right)$;

h) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{18}}-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\right):\left(2-\dfrac{6-\sqrt{32}}{3}\right)$.

4. Számítsd ki és tanulmányozd, hogy az a szám pozitív, negatív vagy nulla!

$a=\sqrt{63}\cdot\left[5\sqrt{27}-3\cdot\left(5\sqrt{3}+\sqrt{28}\right)\right]+11^2$.

5. Ha $b=8\sqrt{6}:\left(2\sqrt{3}\right)-2\cdot\left(1+\sqrt{8}\right)$, akkor számítsd ki $1+b^{-1}+b^{-2}$.

6. Adottak a: $c=\left(\sqrt{200}+\sqrt{150}\right):\left(5\sqrt{2}\right)$ és

$d=\left[\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}-2\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{12}\right):\sqrt{3}\right]:2-\sqrt{8}$.

Bizonyítsd be, hogy a $c+d$ összeg természetes szám.

7. Határozd meg az $M=\{x\in\mathbb{Z}\mid a<x<b\}$ halmaz elemeit tudva, hogy

$a=\left[\sqrt{15}\cdot\left(\sqrt{75}-\sqrt{45}+10\sqrt{3}\right)\right]:(-15)-\sqrt{3}$ és

$b=0,75\cdot\sqrt{72}-\dfrac{\sqrt{32}}{8}+0,1(6)\cdot\sqrt{18}$.

8. Végezd el a műveleteket, majd rendezd növekvő sorrendbe az a, b, c, d számokat:

$a=0,4\cdot\sqrt{20}-\sqrt{4,05}+\dfrac{\sqrt{10}:\sqrt{2}}{5}$

$b=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{12}-4\right)+\sqrt{450}:\left(-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{18}+\dfrac{\sqrt{384}}{5}\right)$

$c=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{8}-\dfrac{5\sqrt{6}}{6}-\dfrac{2\sqrt{300}}{5}\right]\cdot 0,6$

$d=\left(\dfrac{\sqrt{24}}{3}-\dfrac{\sqrt{54}}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{120}-\sqrt{1080}+0,5\cdot\sqrt{750}\right)$.

9. Határozd meg azt a legnagyobb számot, amely kisebb az $x=\left(\sqrt{2}\right)^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^5:\left(\sqrt{2}\right)^7+\left(\sqrt{2}\right)^9$ számnál!

10. Határozd meg azt a legkisebb számot, amely nagyobb mint az $y = \left(-\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}\right)^3 : \left(\sqrt{6}\right)^{12}$.

11. Végezd el a szükséges műveleteket, és bizonyítsd be, hogy:

a) $\sqrt{\dfrac{49+49^2}{50+50^2}} < \sqrt{\dfrac{50+50^2}{51+51^2}}$

b) $\sqrt{\dfrac{16+\sqrt{192}}{18+\sqrt{243}}} > \sqrt{\dfrac{7+\sqrt{147}}{8+\sqrt{192}}}$

12. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakba az alábbi kifejezéseket:

a) $2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)-2\sqrt{18}+2\sqrt{15}$

b) $5\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)-\sqrt{16-3\cdot 2}+10\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{12}-2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{30}:\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)-\sqrt{40}$

d) $-\sqrt{32}+\sqrt{216}+3\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}-2\sqrt{2}\right)$

e) $\dfrac{6-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

f) $\left(\dfrac{11}{15\sqrt{2}}+\dfrac{3}{5\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right):\dfrac{5}{48\sqrt{6}}$

g) $\left(\dfrac{7}{2\sqrt{3}}-\dfrac{13}{4\sqrt{3}}+\dfrac{5}{6\sqrt{3}}\right):\dfrac{13}{24\sqrt{3}}$

h) $\left(\dfrac{8}{5\sqrt{7}}-\dfrac{3}{4\sqrt{7}}-\dfrac{1}{10\sqrt{7}}\right)\cdot\dfrac{4\sqrt{35}}{3}$

i) $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{0,(2)}\right)^3\cdot\sqrt{2}$

13. Számítsd ki az $x = 30\cdot a + b$ és $y = a : b$ értékét, ahol:

$$a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

$$b = \sqrt{2}^5-\sqrt{3}^5+\sqrt{5}^3$$

14. Hasonlítsd össze az a és b számot!

a) $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{20}}$ és $b = \dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

b) $a = 2\sqrt{32}-6:\sqrt{18}$ és $b = \dfrac{49}{\sqrt{8}+\sqrt{50}}$

c) $a = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}$ és $b = \sqrt{2^{2^2}}$

15. Tanulmányozd, hogy melyik racionális szám az alábbiak közül

a) $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{27}}-\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{12}}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}-10}{5\sqrt{2}}-\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{8}}+\dfrac{9-2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

c) $\left|5-3\sqrt{3}\right|-\left|4\sqrt{3}-7\right|-7\sqrt{3}$

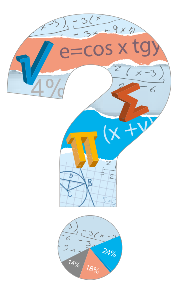
d) $\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{35}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{\sqrt{63}}$

e) $\sqrt{3^{10}+3^8-10^7}:\sqrt{3^8-10^6}$

f) $\sqrt{\left(2\sqrt{3}+4\right)^2}-\sqrt{\left(-\sqrt{3}-2\right)^2}$

g) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\sqrt{\left(4\sqrt{3}-7\right)^2}$

h) $\left(8\sqrt{2}\right)^{-1}+\left(2\sqrt{2}\right)^{-3}-\sqrt{2}^{-5}$



Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont.

I. *Írd ki mindenik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** $\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\left(-3\sqrt{5}+4\sqrt{5}\right)+5\sqrt{5}$ számítás eredménye: A. $5\sqrt{5}$ B. $7\sqrt{5}$ C. $9\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{5}$
5p	**2.** Elvégezve a $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{42}:\sqrt{7}-\sqrt{54}$ számítást, a kapott eredmény: A. $-\sqrt{6}$ B. $-2\sqrt{6}$ C. $-3\sqrt{6}$ D. $\sqrt{6}$
5p	**3.** Az $a=\sqrt{576}:\sqrt{144}-\sqrt{(-5)^4:5^2}$ szám: A. természetes B. pozitív racionális C. negatív racionális D. irracionális
5p	**4.** A $b=2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{-3}$ szám: A. negatív egész B. negatív racionális C. pozitív egész D. pozitív racionális
10p	**5.** Ha $a=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{27}}$ és $b=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{32}}$, akkor $a\cdot b$ egyenlő: A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{11}{18}$ D. $\frac{5}{18}$
10p	**6.** Ha $\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8}}{b}$ és $\frac{\sqrt{3c}}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{5d}}$, akkor $a\cdot b-c\cdot d$ egyenlő: A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5p	**7.** Az $x\sqrt{27}-\sqrt{12}=\sqrt{300}$ egyenlőséget teljesítő x szám: A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
5p	**8.** A $\sqrt{4\cdot y}+\sqrt{72}=\sqrt{128}$ egyenlőséget teljesítő y szám: A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

5p	**1. a)** Mutasd ki, hogy $\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ racionális szám.
20p	**b)** Adott $a=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{6}-\sqrt{3}$ és $b=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+2+\sqrt{3}$ szám. Bizonyítsd be, hogy $\frac{6}{5}<\frac{b}{a}<\frac{5}{4}$.
15p	**2.** Tekintsük az $E(x)=10-\left(x+\sqrt{5}\right)^2$ kifejezést. Számítsd ki $E\left(-\sqrt{5}\right)+E\left(\sqrt{5}\right)$ és ellenőrizd, hogy a számítás eredménye pozitív szám, negatív szám, vagy nulla.

1.6. n valós szám súlyozott számtani közepe, $n \geq 2$. Két pozitív valós szám mértani közepe

1.ℓ. n valós szám súlyozott számtani közepe, $n \geq 2$.

Fedezzük fel, értsük meg!

V. osztálytól kezdve, a tanulásod eredményének kiértékelésekor jegyet kapsz. Félév végén kiszámolják mindegyik tantárgy átlagát az alábbi módon:

1. Ha az illető tantárgynál nincs félévi dolgozat, akkor a napló *Jegyek* cellájában levő jegyek számtani közepét számolják ki. A kapott eredményt egészekre kerekítik, és *átlagként* beírják a naplóba.

A következő értelmezés megadja a számítási szabályt:

Értelmezés: Ha adott n valós szám

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, akkor a számtani közép:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

A VII. osztályos Vencel I. félévben, földrajzból a következő jegyeket kapta: 10, 8, 9, 10. Vencel földrajz átlaga $m_a = \dfrac{10+10+9+8}{4} = 9{,}25$.
Kerekítve 9-es átlagot írnak a naplóba.

2. Ha a tantárgynál van félévi dolgozat (jelöljük F betűvel), az átlagot két lépésből számoljuk ki:

a) A napló jegyek cellájában levő jegyek számtani közepét két tizedes pontossággal számolják ki. Nem veszik figyelembe itt a félévi dolgozat jegyet. Ezt az átlagot jelöljük M betűvel.

Vencel, I. félévben, matematikából a következő jegyeket kapta: 9, 9, 10, 9, 10, valamint a félévi dolgozat jegye 10.

Számítsuk ki az átlagát:

$$M = m_a = \frac{9+9+10+9+10}{5} = 9{,}4$$

Megjegyzés: Néhány jegy ismétlődhet a számtani közép számolása során. Például, a fenti esetben, Vencelnek két 10-es és három 9-es jegye van. Az átlag kiszámolása gyorsabb és praktikusabb lett volna, ha a következőképpen számoltuk volna ki: $M = \dfrac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 9}{2+3} = 9{,}4$, vagyis használva a súlyozott számtani középet. Az 10-es szám súlya 2, a 9-es szám súlya pedig 3. Egyértelmű, hogy a *jegyek száma egyenlő a súlyok összegével*.

b) Kiszámoljuk az M és F számok számtani közepét, használva a 3-as illetve az 1-es **súlyokat**.

Értelmezés: Az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ számoknak $p_1, p_2, \ldots, p_n$ súlyokkal számolt súlyozott számtani közepe az $m_p = \dfrac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$ szám, melyet röviden, a fenti n szám súlyozott közepének nevezzük.

A matematika félévi átlaga a következő lesz:

$$m_p = \frac{3M + T}{4} = \frac{3 \cdot 9{,}4 + 10}{4} = 9{,}55.$$

Kerekítve, a 10-es átlagot írják be a naplóba.

Az adott példa esetén azt mondjuk, hogy az ***M*** átlag súlya **3**, a ***F*** jegy súlya pedig **1**, vagy az ***M*** súlya **75%**, a ***F*** szám súlya pedig **25%**. $m_p = \dfrac{3M + T}{4} = \dfrac{75}{100} \cdot M + \dfrac{25}{100} \cdot T$.

Amikor nagy mennyiségű szám számtani közepét határozzuk meg, akkor előnyös súlyozott közepet számolni. A súlyozott közép képlete csupán egy rendszerezett változata az egyszerű számtani közép képletének, használva a valós számok összeadásának kommutatív és asszociatív tulajdonságát.

Egy osztály **20 tanulójának**, az utolsó ismeretfelmérőn kapott jegyeit a mellékelt táblázatba foglaltuk össze.
Számoljuk ki az osztálynak ezen a kiértékelésen kapott átlagát!

Jegy	**7**	**8**	**9**	**10**
Azon tanulók száma, akik e jegyet kapták	3	6	7	4
A jegy súlya	**3**	**6**	**7**	**4**

$$m_a = \frac{(10+10+10+10)+(9+9+9+9+9+9+9)+(8+8+8+8+8+8)+(7+7+7)}{20} = 8{,}6 \text{ (számtani közép)}$$

vagy $m_p = \dfrac{4\cdot\mathbf{10}+7\cdot\mathbf{9}+6\cdot\mathbf{8}+3\cdot\mathbf{7}}{4+7+6+3} = \dfrac{172}{20} = 8{,}6$ (súlyozott közepe).

Alkalmazás

A számtani közép tulajdonságai:

1. Két vagy több szám számtani közepe a számok közül legalább a legkisebbel, illetve a számok közül legfeljebb a legnagyobbal lehet egyenlő.

Adott n valós szám, melyek közül a a legkisebb és b a legnagyobb. Akkor $a = \dfrac{n\cdot a}{n} \le m_a \le \dfrac{n\cdot b}{n} = b$.
A második példában $7 < 8{,}6 < 10$.

2. Két szám súlyozott közepe ahhoz a számhoz áll közelebb, amelyiknek nagyobb a súlya

A matematika esetén, a félévi átlag kiszámolása során az $\boldsymbol{M}$ átlag súlya nagyobb, mint az $\boldsymbol{F}$ szám súlya, valamint $m_p - \boldsymbol{M} < \boldsymbol{F} - m_p$

$M = 9{,}4$, $F = 10$ és $\dfrac{3M+F}{4} = 9{,}55$

3. Ugyanazon számok esetén a számtani közép értéke változhat a súlyok függvényében.

Sárának és Dávidnak történelemből ugyanannyi jegye van, csak 9-esek és 10-esek. Mégis más az átlaguk:

$m_1 = \dfrac{3\cdot 9+10}{4} = 9{,}25$, illetve $m_2 = \dfrac{3\cdot 10+9}{4} = 9{,}75$.

Jegyezd meg!

- Ha adott n valós szám, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, akkor a számtani közép: $m_a = \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.
- *Értelmezés*: Az $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ számoknak $p_1, p_2, \ldots, p_n$ súlyokkal számolt súlyozott számtani közepe az

$$m_p = \frac{p_1\cdot x_1 + p_2\cdot x_2 + \ldots + p_n\cdot x_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n} \text{ szám,}$$

melyet röviden, a fenti n szám súlyozott közepének nevezzük.

1. Két vagy több szám számtani közepe a számok közül legalább a legkisebbel, illetve a számok közül legfeljebb a legnagyobbal egyenlő.

2. Két szám súlyozott közepe ahhoz a számhoz áll közelebb, amelyiknek nagyobb a súlya.

Gyakorlatok és feladatok

1. Számítsd ki az a és b valós számok számtani középét!

a) $a = 2$, $b = 18$;
b) $a = 7{,}25$, $b = 22{,}75$;
c) $a = 5{,}5$, $b = 1{,}8(3)$;
d) $a = 1 - \frac{4}{5}$, $b = 1 + 0{,}8$;
e) $a = 2\sqrt{6}$, $b = 8\sqrt{6}$;
f) $a = 3\sqrt{5}$, $b = 17\sqrt{5}$;
g) $a = \sqrt{63} - 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{7} + \sqrt{8}$;
h) $a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = 2 + \sqrt{12} + \sqrt{50}$.

2. Számítsd ki az a, b, c számok számtani középét, ha: $a = 3\sqrt{20} - \sqrt{48}$; $b = \sqrt{108} - 3\sqrt{8}$; $c = \sqrt{72} - \sqrt{12}$.

3 Az a, b, c számok számtani közepe $4 + 8\sqrt{2}$.
a) Tudva, hogy $a = 3 + \sqrt{32}$, $b = 5 + \sqrt{72}$, határozd meg a c számot;
b) Határozd meg a három számot, ha $2a = 3b = 6c$.

4. A VII. C osztályban 25 tanuló közül 9 fiú. A fiúk átlag testmagassága 170 cm, a lányok átlag testmagassága pedig 165 cm. Számítsd ki a VII.C osztály tanulóinak átlag testmagasságát.

5. Lenke két különböző üzletből vásárolt szőlőt. Az első üzletből 1,5 kg vásárolt szőlőért 13,5 lejt, a második üzletből vásárolt 2,25 kg szőlőért pedig 15,75 lejt fizetett.
a) Határozd meg a szőlő kilogrammjának árát mindkét üzletben.
b) Határozd meg a Lenke által vásárolt szőlő árának átlagát!

6. Egy hét minden napján reggel 9 órakor megmérték a levegő hőmérsékletét. A meteorológus a mért értékeket az alábbi táblázatba foglalta. A következő hét első három napján ugyanazt az x-szel jelölt hőmérsékletet mérték, Celsius fokban kifejezve.

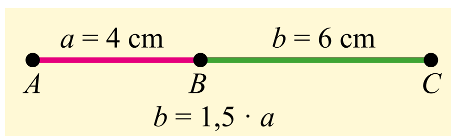
ziua	L	Ma	Mi	J	V	S	D	L	Ma	Mi
T	7°C	8°C	9°C	12°C	15°C	15°C	18°C	x°C	x°C	x°C

a) Számítsd ki az első hét átlag hőmérsékletét!
b) Tudva, hogy a táblázatban levő 10 nap átlag hőmérséklete 13,5°C, határozd meg az x értékét!

2.ℓ. Két pozitív valós szám mértani közepe.

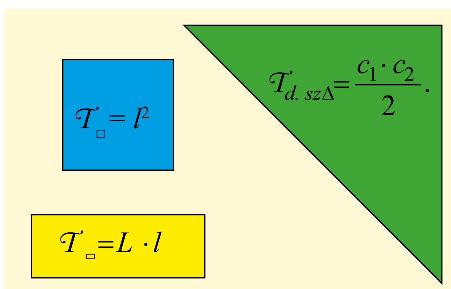
Emlékeztető

Tekintsük a $\frac{b}{a} = k$ arányt, ahol a és b pozitív valós szám, melyet $b = a \cdot k$ alakban is írhatjuk.



Példa: Az AB szakasz hossza 4 cm, a BC szakasz hossza pedig 6 cm. Tehát a $\frac{BC}{AB} = \frac{6}{4}$ vagy a $BC = \frac{6}{4} \cdot AB$ vagy a $BC = 1{,}5 \cdot AB$ összefüggést írhatjuk.

Az l oldalhosszúságú négyzet területe $T_{\square} = l^2$.
A téglalap területe $T_{\square} = L \cdot l$, ahol L a hosszúság és l a szélesség hossza.
A derékszögű háromszög területe $T_{d.\ sz\Delta} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$.



Fedezzük fel, értsük meg!

1. Adottak ebben a sorrendben kollineáris A, B, C, D pontok, úgy, hogy , $BC = b$ és $CD = c$. Tudjuk, hogy $BC = k \cdot AB$ és $CD = k \cdot$ BC.

a) Alkoss aránypárt az a, b, c pozitív számokkal.

b) Fejezd ki a b pozitív számot az a és c pozitív szám függvényében.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{b}{a} = k \\[2mm] \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{c}{b} = k\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot c \Leftrightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$$

Azt mondjuk, hogy a b szám az a és c szám *mértani közepe*.

2. Az $ABCD$, téglalap esetén $AB = 9$ és $BC = 25$.

a) Számítsd ki a téglalap területét.

b) Számítsd ki annak a négyzetnek az oldalhosszát, amelynek területe egyenlő az adott téglalap területével.

Legyen a a négyzet oldalának hossza. $\mathcal{T}_{ABCD} = AB \cdot BC =$ $= 9 \cdot 25$, $\mathcal{T}_{négyzet} = a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \cdot 25$, tehát $a = \sqrt{9 \cdot 25} = 15$.

Azt mondjuk, hogy a négyzet oldalának hossza mértani közepe a téglalap méreteinek, tudva, hogy a két síkidom területe egyenlő.

Értelmezés: Az x és y pozitív valós számok **mértani közepe** az $m_g = \sqrt{x \cdot y}$ szám.

Kiindulva az $\dfrac{m_g}{x} = \dfrac{y}{m_g} \Leftrightarrow m_g = \sqrt{x \cdot y}$, ekvivalenciából, az x és y számok mértani közepét az x és y számok arányközepének is nevezzük. Mivel sokszor alkalmazzuk a mértanban, gyakrabban használjuk a *mértani közép* megnevezést.

Alkalmazás

A. 1. Adott a 2, 4, 8, 16, 32, … pozitív számok sorozata (a második tagtól kezdve mindegyik tag a megelőző tag kétszerese).

a) Írd le a sorozat következő három tagját.

b) Észrevesszük, hogy $4^2 = 2 \cdot 8$ vagy $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$. Keress két hasonló összefüggést a sorozat tagjai között!

2. Szerkessz a fentihez hasonló feladatot, használva más számokat!

B. Az x és y pozitív számok mértani közepének tulajdonságai:

1. Két pozitív szám mértani közepe a számok közül legalább a legkisebbel, illetve a számok közül legfeljebb a legnagyobbal egyenlő; ha a két szám egyenlő, akkor a mértani közép megegyezik mindkét számmal.

Ha $0 < x < y$, akkor $x = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x \cdot y} \le \sqrt{y^2} = y$ Mivel $m_g = \sqrt{x \cdot y}$, az $x \le m_g \le y$.

Ha $x = y$ akkor $m_g = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x \cdot x} = x$.

2. Két pozitív szám mértani közepe kisebb vagy egyenlő a két szám számtani közepénél.

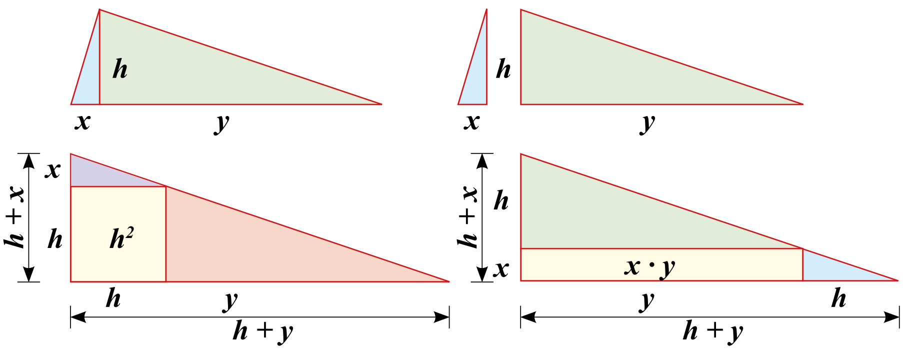
Bármely $x > 0$ és $y > 0$, $\sqrt{x \cdot y} \le \dfrac{x+y}{2}$.   **Példa.** $\sqrt{2 \cdot 18} = 6 < 10 = \dfrac{2+18}{2}$; $\sqrt{9 \cdot 10} \approx 9{,}4868 < 9{,}5 = \dfrac{9+10}{2}$.

3. Két pozitív szám mértani és számtani közepe egyenlő akkor és csakis akkor, ha a két szám egyenlő. Ha x és y pozitív szám, akkor $\sqrt{x \cdot y} = \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y$.

Gyakorlati alkalmazás

Ennél a gyakorlatnál legalább kétfős csapatokban dolgozzatok.
Szükségetek lesz kartonra, markerre, mértani felszerelésre, ollóra.

1. Szerkessz a kartonra egy derékszögű háromszöget!
2. Szerkeszd meg az az átfogóhoz tartozó magasságot. Jelöld a magasságot h betűvel, majd a magasság által az átfogón meghatározott szakaszokat x és y betűvel.
3. Satírozd be különböző színekkel a keletkezett két derékszögű háromszöget!
4. Vágd ki a kapott háromszögeket!
5. Szerkessz meg és vágj ki egy h oldalhosszúságú négyzetet és egy olyan téglalapot, melynek méretei x és y!
6. Egy nagyobb kartonon illeszd egymáshoz a négyzetet és a két háromszöget úgy, hogy kapj egy háromszöget. Rajzold meg és vágd ki a kapott nagy háromszöget.
7. Helyezd egymás mellé a két kis háromszöget és a téglalapot úgy, hogy kapj egy derékszögű háromszöget. Mit veszel észre?
8. Hasonlítsd össze a készített anyagot a mellékelt ábrákkal, majd tanulmányozd a kapott összefüggéseket!



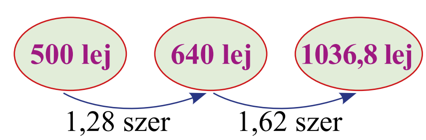
Amikor a h^2 területű négyzetet és a két háromszöget összeillesztjük, akkor olyan derékszögű háromszöget kapunk, melynek befogói $y + h$ és $x + h$ hosszúságúak.
Amikor az $x \cdot y$ területű téglalapot és a két háromszöget összeillesztjük, akkor az előzővel kongruens derékszögű háromszöget kapunk.
Következtetés: A négyzet és téglalap területe egyenlő, $h^2 = x \cdot y \;\Rightarrow\; h = \sqrt{x \cdot y}$, tehát az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe a magasság által az átfogón meghatározott szakaszok hosszának.

Megjegyzés: Ezzel a gyakorlattal bizonyítottátok a derékszögű háromszögben felírható egyik fontos törvény-szerűséget, melyet *magasságtételnek* nevezünk. Ezzel az összefüggéssel mértanból fogunk foglalkozni.

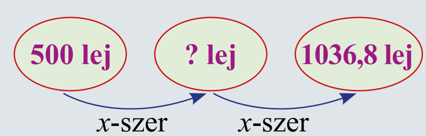
A gyakorlatban is fontos észrevenni a mértani közép használatának fontosságát.

Példa

Mihály édesapja egy üzlet reklámrészlegén dolgozik. Az üzletben található egyik termék ára 500 lej. A következő évben két, egymás utáni áremeléssel szeretné drágítani ezt a terméket. Először 1,28-szorosan drágítana, majd 6 hónap múlva az új árat 1,62-szeresen növelné. A szükséges számítások elvégzése után megállapította, hogy a termék végső ára 1036,8 lej lesz.



Mihály azt tanácsolja, hogy a termék árát két egyforma drágítással növeljék, azaz x-szeresen emeljék az árat két alkalommal úgy, hogy a végső ár ugyanaz legyen.
Édesapja megdicséri Mihályt ötletéért, és megkérdi:
Hogyan számoljuk ki az x értékét?



Mihály kiszámolja a két áremelésnek megfelelő szám számtani közepét: $\frac{1,28+1,62}{2}=1,45$ de észreveszi, hogy *nem ugyanazt az árat* kapja.

500 lej $\xrightarrow{\text{1,45-szer}}$ 725 lej $\xrightarrow{\text{1,45-szer}}$ 1051,25 lej

Jobban meggondolva, Mihály arra a következtetésre jut, hogy a mértani közepet kell használnia: $x=\sqrt{1,28\cdot 1,62}=1,44$.
Magyarázd meg, miért kell a mértani közepet használni?

500 lej $\xrightarrow{\text{1,44-szer}}$ 720 lej $\xrightarrow{\text{1,44-szer}}$ 1036,8 lej

Jegyezd meg!

Az x és y pozitív valós számok **mértani közepe**, vagy arányközepe az $m_g=\sqrt{x\cdot y}$ szám.

1. Bármely $0<x<y$ esetén $x\le m_g\le y$.
2. Ha $x>0$ és $y>0$, akkor $\sqrt{x\cdot y}\le\frac{x+y}{2}$, vagyis $m_g\le m_a$.
3. Ha x és y pozitív számok, akkor $\sqrt{x\cdot y}=\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow x=y$, vagyis $m_g=m_a$ akkor és csakis akkor, ha $x=y$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Számítsd ki az a és b pozitív valós számok mértani közepét:
a) $a=2$, $b=18$; b) $a=3$, $b=12$;
c) $a=\frac{14}{5}$, $b=\frac{10}{7}$; d) $a=112$, $b=\frac{4}{7}$;
e) $a=1,2$, $b=3,(3)$.

2. Számítsd ki az a és b pozitív valós számok mértani közepét:

a) $a=6\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}$;

b) $a=3\sqrt{15}$, $b=5\sqrt{15}$;

c) $a=\sqrt{3}+\sqrt{12}$, $b=\sqrt{48}-\sqrt{3}$;

d) $a=\sqrt{98}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$, $b=\sqrt{162}-\sqrt{72}$.

3. Két pozitív szám mértani közepe $4\sqrt{2}$. Az egyik szám $2\sqrt{2}$. Határozd meg a másik számot!

4. Két pozitív szám mértani közepe $5\sqrt{3}$. Az egyik szám $\sqrt{5}$. Számítsd ki a két szám számtani közepét!

5. Adott az $a=\sqrt{5\sqrt{625}}$, $b=4\sqrt{5}$ szám. Számítsd ki a két szám m_a számtani közepét és m_g mértani közepét. Hasonlítsd össze az m_a és m_g számokat!

6. a) Határozz meg két természetes számot tudva, hogy mértani közepük $\sqrt{101}$.
b) Keress két természetes számot tudva, hogy mértani közepük 5.

7. Határozd meg az $\overline{ab}$ alakú természetes számokat tudva, hogy a 2^a és 4^b számok mértani közepe 8.

8. A pozitív x és 8 számok mértani közepe 12.
a) Határozd meg az x számot.
b) Mennyivel kell az x számot növelni ahhoz, hogy a mértani közép duplázódjon?

9. Az a és b pozitív számok aránya $\frac{4}{9}$, mértani közepük pedig 18. Határozd meg az a és b számot!

Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont.

I. *Írd ki mindenik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** Tamásnak angolból egy 7-es, három 8-as és két 9-es illetve két 10-es jegye van. Tamás átlaga angolból: A. 7 B. 8 C. 9 D. 10
5p	**2.** A 6 és 54 mértani közepe: A. 18 B. 16 C. 14 D. 12
5p	**3.** Az $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ és $\frac{3}{4}$ számoknak 8,12, illetve 16 súlyokkal számított súlyozott számtani közepe: A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$
5p	**4.** Az x és 12 mértani közepe 18. Az x szám értéke: A. 24 B. 27 C. 30 D. 36
5p	**5.** A 3 és y mértani közepe $5\sqrt{3}$. Az y szám értéke: A. 20 B. 24 C. 25 D. 50
5p	**6.** Az $\overline{ab}$ és $\overline{ac}$ számok mértani közepe $6\sqrt{6}$. Ezeknek a számoknak a számtani közepe: A. 10 B. 12 C. 15 D. 18
10p	**7.** $\frac{0,3}{x} = \frac{x}{\sqrt{23,04}}$ aránypárban levő pozitív x szám értéke: A. 1,5 B. 1,4 C. 1,3 D. 1,2
10p	**8.** Ha $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{27}}{b} = \frac{\sqrt{48}}{c}$, akkor az a és c, illetve a és b szám mértani közepeinek szorzata: A. $6\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

 10p **10p** **5p**	**1.** Tekintsük az a és b természetes számokat $0 < a < b$. **a)** Számítsd ki az a és b számok mértani közepét, tudva, hogy számtani közepük 2. **b)** Számítsd ki az a és b számok számtani közepét, tudva, hogy mértani közepük 3. **c)** A b) alpont feltételei alapján számoljuk ki az a és b számnak $2b$ és $7a$ súlyokkal számított súlyozott számtani közepét.
	2. Legyen x és y olyan szám, melyre $\sqrt{\left(x-2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(6\sqrt{3}-y\right)^2} \leq 0$.
10p **5p**	**a)** Határozzuk meg az x és y számot. **b)** Hasonlítsuk össze a $\frac{2}{x+y}$ és $\frac{1}{\sqrt{xy}}$ számokat.

1.7. $x^2 = a$ alakú egyenletek, ahol $a \in \mathbb{R}$

Emlékeztető

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ szám esetén igaz, hogy: $x^2 = (-x)^2$.	a) $7^2 = 49$ és $(-7)^2 = 49$ b) $\sqrt{5}^2 = 5$ és $\left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$; c) $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ és $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.
2. *Bármely* valós szám négyzete pozitív valós szám.	a) $\left(2\sqrt{3}\right)^2 > 0$; b) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 > 0$; c) $0^2 = 0$.
3. Mindegyik pozitív a valós szám esetén megadhatjuk a szám négyzetgyökét, melyet $\sqrt{a}$-val jelölünk. $\sqrt{a}$ szintén pozitív valós, racionális vagy irracionális szám.	a) $\sqrt{9} = 3$; c) $\sqrt{6,25} = 2,5$; e) $\sqrt{5} \approx 2,23$. b) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$; d) $\sqrt{3} \approx 1,73$;
4. Bármelyik negatív szám kisebb, mint 0 és mint bármelyik pozitív szám.	Ha $a < 0$ és $b \geq 0$, akkor $a < b$.
5. Ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.	Ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, akkor $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Oldjuk meg figyelmesen!

Oldjuk meg a következő **feladatot**:

Adott az $H = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$ halmaz.

a) Határozd meg az H halmaz azon x valós elemét, melyre $x^2 = 25$.

b) Határozd meg azokat az x valós számokat, melyre $x^2 = 25$.

Megoldás: a) $H = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$. Az H halmaz mindegyik x elemére kiszámoljuk x^2 értékét, és azt kapjuk, hogy: $(-6)^2 = 36 \neq 25$; $(-5)^2 = 25$; $(-4)^2 = 16 \neq 25$; $2^2 = 4 \neq 25$; $5^2 = 25$. Következtetésként, kizárólag az 5 és -5 olyan szám, melyek az H halmaz elemei és teljesítik az egyenlőséget.

b) Az a) alpont alapján tudjuk, hogy 5 és -5 teljesítik az egyenlőséget, tehát a ***feladat megoldásai***.

Egyszerűen belátható, hogy: 1) Ha $x > 5$ vagy $x < -5$, akkor $x^2 > 25$, tehát nem teljesíti az egyenlőséget.

2) Ha $x > -5$ és $x < 5$, akkor $x^2 < 25$, tehát nem teljesíti az egyenlőséget.

Tehát kizárólag az 5 és -5 olyan valós szám, amelyek a ***feladat megoldásai***.

A feladat így is megfogalmazható:

Adott az $H = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$ halmaz.

a) Oldd meg az H halmazon az $x^2 = 25$ **egyenletet**.

b) Oldd meg a valós számok halmazán az $x^2 = 25$ **egyenletet**.

Megoldás: Azt mondjuk, hogy az egyenletben van egy x ***ismeretlen***.

Bizonyítottuk, hogy az 5 és -5 teljesítik az egyenletet, tehát az adott ***egyenlet megoldásai*** H és $\mathbb{R}$ halmazon is.

Az $M = \{-5, 5\}$ halmaz az adott ***egyenlet megoldásainak halmaza*** mindkét esetben.

Az egyenlet összes megoldásainak meghatározását az *egyenlet megoldásának* nevezzük.

Fedezzük fel, értsük meg!

Ha az **egyenlet** $x^2 = a$ alakú, ahol $a \in \mathbb{R}$ akkor meg kell határoznunk az összes olyan valós számot, amely teljesíti az egyenlőséget.

- Az x az egyenletben levő *ismeretlen*.
- Az ismeretlen összes olyan valós értékét, mely teljesíti az egyenletet, az egyenlet *megoldásának* nevezzük.
- Az x összes olyan valós értékeinek halmazát, melyre igaz az egyenlőség, az egyenlet *megoldáshalmazának* nevezzük.
- *Megoldani az egyenletet* azt jelenti, hogy meghatározzuk az összes megoldását.

Oldd meg $\mathbb{R}$ -ben az $x^2 = 256$ egyenletet.
16 az egyenlet megoldása, mert $16^2 = 256$.
Hasonlóan, –16 is a az egyenlet megoldása, mert $(-16)^2 = 256$. Ha $x > 16$ vagy $x < -16$, akkor $x^2 > 256$, tehát nem teljesíti az egyenlőséget. Ha $x > -16$ és $x < 16$, akkor $x^2 < 256$, tehát nem teljesíti az egyenlőséget. Tehát, 16 és –16 az egyenlet kizárólagos megoldásai.
Így írjuk: $x_1 = 16$ és $x_2 = -16$. A megoldáshalmaz:
$M = \{-16, 16\}$.
Megjegyzés: A 16-os 256 szám négyzetgyöke, –16 pedig 16 ellentettje.
Írhatjuk, hogy: $x_1 = \sqrt{256} = 16$ és $x_2 = -\sqrt{256} = -16$.

Az $x^2 = a$ alakú egyenlet megoldása, ahol $a \in \mathbb{R}$.

1) Ha $a > 0$, az $x^2 = a$ egyenlet $|x| = \sqrt{a}$, alakban írható, amelyek igaz akkor és csakis akkor, ha $x = \sqrt{a}$ vagy $x = -\sqrt{a}$.
Azt mondjuk, hogy az egyenlet valós megoldásai: $x_1 = \sqrt{a}$ és $x_2 = -\sqrt{a}$.
Az egyenlet megoldáshalmaza:
$M = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

a) $x^2 = 64 \Rightarrow x_1 = \sqrt{64} = 8$ és $x_2 = -\sqrt{64} = -8$, azaz $M = \{-8, 8\}$;

b) $x^2 = 15 \Rightarrow x_1 = \sqrt{15}$ és $x_2 = -\sqrt{15}$, azaz $M = \{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\}$;

c) $x^2 = 18 \Rightarrow x_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ és $x_2 = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$, azaz $M = \{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$.

2) Az $x^2 = 0$ alakú egyenletnek, ahol $x = 0$, tehát $M = \{0\}$.

a) $(2x)^2 = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ és $M = \{0\}$.
b) $(2x - 10)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$ és $M = \{5\}$.

3) Az $x^2 = a$, lakú egyenletnek, ahol $a < 0$ nincs valós megoldása, mert $x^2 \geq 0$ és $a < 0$, tehát $x^2 \neq a$, bármely x valós szám esetén.
Az egyenlet megoldáshalmaza $M = \varnothing$.

a) Az $x^2 = -16$ egyenletnek nincs megoldása, $M = \varnothing$.
b) Az $x^2 = -1$ egyenletnek nincs megoldása, $M = \varnothing$.

Megjegyzés: 1) Az egyenletben levő ismeretlent más betűvel is jelölhetjük. Például, a $t^2 = 16$ egyenletben levő ismeretlen t, megoldásai pedig $t_1 = -4$ és $t_2 = 4$. A megoldáshalmaza $M = \{-4, 4\}$, ugyanúgy, mint $x^2 = 16$ vagy $m^2 = 16$ vagy akár $a^2 = 16$ egyenletek esetén.
2) Javasolt, hogy az egyenlet megoldását a megoldáshalmazának leírásával fejezzük be.

Alkalmazás

Emlékezzünk, hogy azt a két egyenletet, melynek megoldásai ugyanazon halmaz elemei, és megoldáshalmaza megegyezik, *ekvivalens egyenleteknek* nevezzük. Ekvivalens átalakításoknak nevezzük azokat az átalakításokat, melyek során ekvivalens egyenleteket kapunk. Az alábbi átalakításokat használhatjuk:
1) Hozzáadjuk vagy kivonjuk az egyenlet mindkét oldalából ugyanazt a valós számot;
2) Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk, vagy osztjuk ugyanazzal a nullától különböző valós számmal;
3) Ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$, $a = b$ akkor és csakis akkor, ha $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Sok olyan egyenletet kell megoldani, melynek más alakja van, de ekvivalens átalakítások segítségével $x^2 = a$ alakba hozhatjuk az adott egyenletet.

Példák.

a)
$$2x^2+5=133 \;\big|-5$$
$$2x^2=128 \;\big|:2$$
$$x^2=64$$
$$|x|=\sqrt{64} \Leftrightarrow |x|=8$$
$$x_1=-8,\; x_2=8$$
$$M=\{-8, 8\}.$$

b)
$$(x-9)^2=144$$
$$|x-9|=\sqrt{144} \Leftrightarrow |x-9|=12$$
$$x-9=-12 \text{ vagy } x-9=12$$
$$x_1=-3 \text{ vagy } x_2=21$$
$$M=\{-3, 21\}.$$

c)
$$(2x-9)^2=25$$
$$|2x-9|=\sqrt{25} \Leftrightarrow |2x-9|=5$$
$$2x-9=-5 \text{ vagy } 2x-9=5$$
$$2x=4 \text{ vagy } 2x=14$$
$$x_1=2 \text{ vagy } x_2=7$$
$$M=\{2; 7\}$$

Jegyezd meg!

1) Ha $a>0$, akkor $x^2=a \Leftrightarrow |x|=\sqrt{a} \Leftrightarrow x=\sqrt{a}$ vagy $x=-\sqrt{a}$. $M=\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$
2) $x^2=0$ akkor és csakis akkor, ha $x=0$. $M=\{0\}$.
3) Ha $a<0$, akkor $x^2 \neq a$, bármely x valós szám esetén. $M=\varnothing$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Oldd meg az $\mathbb{N}$ halmazon a következő egyenleteket:
a) $x^2=625$;
b) $x^2=256$;
c) $2\cdot x^2=800$;
d) $-7\cdot x^2=-343$;
e) $3\cdot x^2+1=76$.

2. Írd le az összes olyan (a^2, a) számpárt, amelyre:
a) $a^2 \in \{16, 81, 400\}$ és $a \in \mathbb{N}$;
b) $a^2 \in \{25, 49, 144\}$ és $a \in \mathbb{Z}$;
c) $a^2 \in \{16, 81, 400\}$ és $a \in \mathbb{Q}$.

3. Határozd meg az egyenletek valós megoldásait!
a) $x^2=36$;
b) $x^2=3{,}24$;
c) $x^2=\dfrac{25}{4}$;
d) $x^2=-9$;
e) $x^2+7=907$
f) $4\cdot x^2+1=9^2$.

4. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!
a) $5x^2=320$;
b) $\dfrac{4}{3}\cdot x^2=\dfrac{16}{27}$;
c) $(x-1)^2=2{,}(7)$;
d) $\dfrac{x}{20}=\dfrac{45}{x}$;
e) $\dfrac{21}{8x}=\dfrac{3x}{14}$;
f) $\dfrac{2m-1}{3}=\dfrac{27}{2m-1}$.

5. Határozd meg az egyenletek negatív megoldásait!
a) $2x^2+7=105$;
b) $\dfrac{14}{15x}=\dfrac{x}{105}$.

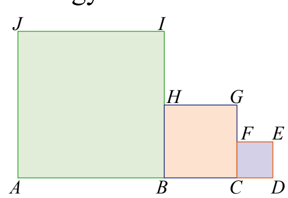
6. Határozd meg az egyenletek negatív megoldásait!
a) $x^2+15=51$;
b) $\dfrac{2}{3}\cdot x^2+0{,}(6)=\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$.

7. Oldd meg az $M=\{x\in\mathbb{Z} \mid 94\le x^2\le 169\}$ halmazon az alábbi egyenleteket:
a) $x^2+15=51$;
b) $\dfrac{2}{3}\cdot x^2+0{,}(6)=\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$.

8. Oldd meg $\mathbb{R}$-en az egyenleteket:
a) $x^2=5$;
b) $t^2=\dfrac{1}{2}$;
c) $2\cdot x^2=0$;
d) $12x^2+7=\dfrac{25}{3}$;
e) $x^2+3^3=(-2)^4$;
f) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}=1{,}(6)$.

9. Adott az $M=\left\{0{,}81;\ \dfrac{1}{4};\ -1;\ 0;\ 2;\ -9;\ 225\right\}$. halmaz. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy találomra kiválasztva az M halmaz egy a elemét, az $x^2=a$ egyenletnek:
a) racionális megoldásai legyenek;
b) egész megoldásai legyenek;
c) valós megoldásai legyenek;
d) egyetlen valós megoldása legyen.

10. A mellékelt ábrán egy földterület vázlatos rajza látható. A földterület három egymáshoz illesztett $ABIJ$, $BCGH$ és $CDEF$ négyzetből áll. A H pont a BI szakasz, F pedig a CG szakasz felezőpontja. Tudva, hogy a teljes földterület felszíne 0,0525 ha, számítsd ki a három négyzet oldalának hosszát!



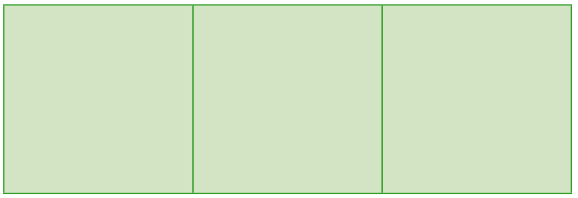
Ismeretfelmérő

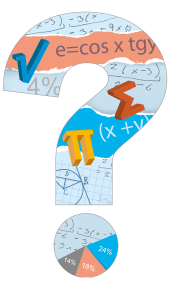
Hivatalból 10 pont.

I. *Írd ki mindenik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** Az $x^2 - 81 = 0$ egyenlet megoldáshalmaza: A. $\{-81, 81\}$ B. $\{-3, 3\}$ C. $\{-9, 9\}$ D. $\{-27, 27\}$
5p	**2.** A $-4x^2 + 25 = 0$ egyenlet megoldáshalmaza: A. $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$ B. $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ C. $\left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ D. $\{-0{,}25; 0, 25\}$
5p	**3.** Ha $x > 0$ és $(x-3)^2 = 36$, akkor x értéke: A. -3 B. 3 C. 6 D. 9
5p	**4.** Ha $x < 0$ és $(x-1)^2 = \left(1-\sqrt{5}\right)^2$, akkor az x értéke: A. $2-\sqrt{5}$ B. $-2-\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}-2$ D. $\sqrt{5}-3$
10p	**5.** Az $a \cdot (a+6) = 6 \cdot (a+1{,}5)$ egyenlőséget teljesítő a természetes szám: A. 6 B. 3 C. 1,5 D. 9
10p	**6.** A $\frac{b-1}{21} = \frac{27}{7b-7}$ egyenlőséget teljesítő b negatív egész szám: A. 8 B. 10 C. -8 D. -10

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

10p	**1.** Adott egy négyzet alakú földterület. Ha oldalának hosszát 25 m-rel növeljük, akkor területe 0,5625 ha lesz. Határozd meg a négyzet oldalának hosszát.
 10p **5p** **5p**	**2.** A mellékelt ábrán három, ugyanakkora területű négyzetből alkotott téglalap alakú földterület látható, melynek területe 2187 m^2. **a)** Határozd meg egyik négyzet oldalhosszát! **b)** Határozd meg a téglalap méreteit! **c)** Határozd meg annak a kerítésnek a hosszát, amely teljes mértékben bekeríti a földterületet. 
20p	**3.** Karcsi szobájában egy négyzet alakú poszter van arra a falra ragasztva, melynek méretei 6 m és 2,4 m. A poszter oldalhossza természetes szám, méterben kifejezve. Tudva, hogy a poszter a fal több mint $\frac{1}{4}$-ét lefedi, számítsuk ki a poszter méreteit.



2 Lineáris egyenletek és egyenletrendszerek

2.1. Egyenlőség átalakítása ekvivalens egyenlőséggé. Azonosságok
2.2. $a \cdot x + b = 0$ alakú egyenletek, ahol a és b valós számok
2.3. Két kétismeretlenes lineáris egyenletből álló egyenletrendszer
2.4. Egyenletekkel vagy lineáris egyenletrendszerekkel megoldható feladatok

Sajátos kompetenciák:

1.2. 2.2. 3.2. 4.2. 5.2. 6.2.

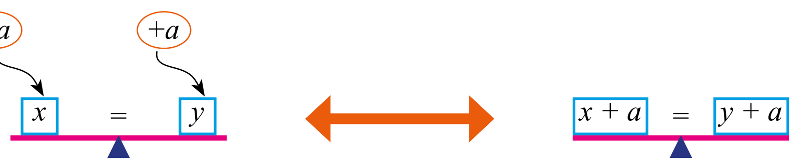
2.1. Egyenlőség átalakítása ekvivalens egyenlőséggé. Azonosságok

Emlékeztető

1) A valós számok halmazán értelmezett egyenlőségi reláció tulajdonságai:
   a) Minden valós szám egyenlő önmagával, azaz $x = x$.
   b) Ha $x = y$, akkor $y = x$.
   c) Ha $x = y$ és $y = z$, akkor $x = z$.
2) Az egyenlőség jel bal oldalán található kifejezést az egyenlőség *baloldalának*, a jobb oldalán található kifejezést az egyenlőség *jobboldalának* nevezzük.

Fedezzük fel, értsük meg!

• A feladatok megoldása során egy adott információt többféleképpen is megadhatunk, látszólag különböző kijelentések alakjában
Például, az $x + 3 = 7$, $x - 2 = 2$ és $x = 4$ kijelentések különbözőképpen vannak megfogalmazva, de mégis ugyanazt jelentik, azaz, hogy az x ismeretlen egyetlen olyan értéke, melyre igazak az egyenlőségek az a 4-es szám. Ilyen kijelentéseket ekvivalenseknek nevezünk.
Így írjuk: $x + 3 = 7 \Leftrightarrow x - 2 = 2$ vagy $x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 4$ vagy $x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$.



A. Adott egyenlőségből kiindulva vele ekvivalens egyenlőséget kaphatunk a következő átalakításokkal:
1) Az egyenlőség mindkét oldalához hozzáadjuk vagy kivonjuk ugyanazt a valós számot.
2) Az egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző valós számmal.
3) Ha az egyenlőség mindkét oldala pozitív szám, akkor ekvivalens egyenlőséget így is kaphatunk:
   a) az egyenlőség mindkét oldalát felemeljük n-edik hatványra, ahol n egész szám.
   b) az egyenlőség mindkét oldalából gyököt vonunk.

A felsorolt átalakításokat így fogalmazhatjuk meg matematikai nyelven:

1) $x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$, bármely $a \in \mathbb{R}$;
   $x = y \Leftrightarrow x - a = y - a$, bármely $a \in \mathbb{R}$.

2) $x = y \Leftrightarrow x \cdot a = y \cdot a$, bármely $a \in \mathbb{R}^*$;
   $x = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{a}$, bármely $a \in \mathbb{R}^*$.

3) Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor $x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$;
   Ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, akkor $x = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$.

Példák.

1) $x = y \Leftrightarrow x + 3 = y + 3$
   $x = y \Leftrightarrow x - 5 = y - 5$

2) $x = y \Leftrightarrow x \cdot 2{,}5 = y \cdot 2{,}5$
   $x = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{-3}$

3) $1{,}5 = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 1{,}5^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$
   $1{,}2 = \dfrac{6}{5} \Leftrightarrow \sqrt{1{,}2} = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$

Ekvivalens egyenlőségek szerkesztése érdekében tekintsük a következő példákat:

a)
$$\begin{aligned} 5x-6 &= 5y-6 \;\big|+6 \\ 5x &= 5y \;\big|:5 \\ x &= y \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3-x &= 3-y \;\big|-3 \\ -x &= -y \;\big|\cdot(-1) \\ x &= y \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x &= y \;\big|:7 \\ \frac{x}{7} &= \frac{y}{7} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \frac{x}{5} &= \frac{y}{9} \;\Big|\cdot(5\cdot 9) \\ 9x &= 5y \end{aligned}$$

B. Ha adott két egyenlőség, akkor az alábbi átalakításokkal lehet ezekkel ekvivalens egyenlőségeket kapni:

1) a két egyenlőség mindkét oldalát összeadjuk.
2) a két egyenlőség mindkét oldalát kivonjuk.
3) a két egyenlőség mindkét oldalát összeszorozzuk.
4) a két egyenlőség mindkét oldalát elosztjuk.
5) a két egyenlőség mindkét oldalát hatványozzuk.

$$\begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & (+) \\ \hline x+a=y+a & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & (-) \\ \hline x-a=y-b & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & (\cdot) \\ \hline x\cdot a=y\cdot b & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x=y & \\ a=b & (:) \\ \hline \frac{x}{a}=\frac{y}{b} & \\ a\neq 0,\ b\neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|} x=y \\ a=b \\ \hline x^a=y^b \\ a,b\in\mathbb{Z}^* \end{array}$$

C. **Matematikai azonosságnak** nevezzük azt az egyenlőséget, mely egy vagy több változót tartalmaz és igaz minden értékre, amit a változók felvehetnek.

Példák.

1. a) $x+0=x$; b) $9x-7x=2x$; c) $x\cdot(x+3)=x^2+3x$; d) $\sqrt{x^2}=|x|$
   olyan egyenlőségek melyek igazak minden $x\in\mathbb{R}$ esetén, tehát egyváltozós matematikai azonosságok.
2. $a^n\cdot a^p=a^{n+p}$, bármely $a\in\mathbb{R}^*$ és $n,p\in\mathbb{N}$ esetén, tehát háromváltozós matematikai azonosság.
3. $1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Alkalmazás

1) Számítsd ki $a+b+x+y$ értékét, ha $x+b=27$ és $y+a=4$.

Megoldás:
$$\begin{array}{r|l} x+b=27 & \\ y+a=4 & (+) \\ \hline a+b+x+y=31 & \end{array}$$

2) Ha $3x+2y=7x$, bizonyítsd be, hogy y az x kétszerese.

Megoldás:
$$\begin{aligned} 3x+2y &= 7x \;\big|-3x \\ 2y &= 4x \;\big|:2 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

3) Ha $a=b$ és $x=y$, ahol $x\geq 0$, $y\geq 0$, mutasd ki, hogy $a\sqrt{x}=b\sqrt{y}$.

Megoldás: $x=y \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}$
$$\begin{array}{r|l} a=b & \\ \sqrt{x}=\sqrt{y} & (\cdot) \\ \hline a\sqrt{x}=b\sqrt{y} & \end{array}$$

4) Számítsd ki $7a+4b+7x+4y$ értékét, ha $a+x=10$ és $b+y=8$.

Megoldás:
$$\begin{aligned} a+x &= 10 \;\big|\cdot 7 \\ 7a+7x &= 70 \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} b+y &= 8 \;\big|\cdot 4 \\ 4b+4y &= 32 \end{aligned}$$
$$\begin{array}{r|l} 7a+7x=70 & \\ 4b+4y=32 & (+) \\ \hline 7a+4b+7x+4y=102 & \end{array}$$

5) Ha $a + b = 14$ és $x + y = 17$, számítsd ki $a + b - x - y$ értékét!

Megoldás: $x + y = 17 \mid \cdot (-1)$

$$-x - y = -17$$

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 14 \\ -x - y = -17 \end{array}\right| (+)$$

$$a + b - x - y = -3$$

6) Ha $a + b = 5$ és $b + c = 7$, számítsd ki $7a + 10b + 3c$ és $7a + 4b - 3c$ értékét!

Megoldás: $a + b = 5 \mid \cdot 7$ és $b + c = 7 \mid \cdot 3$

$$7a + 7b = 35 \qquad 3b + 3c = 21$$

$$\left.\begin{array}{r} 7a + 7b = 35 \\ 3b + 3c = 21 \end{array}\right| (+) \quad \text{és} \quad \left.\begin{array}{r} 7a + 7b = 35 \\ 3b + 3c = 21 \end{array}\right| (-)$$

$$7a + 10b + 3c = 56 \qquad 7a + 4b - 3c = 14$$

Feladat a portfólióba

1) Adj példát az **A** és **B** részben bemutatott átalakításokra, figyelembe véve a megadott példákat.

2) a) Ha $\frac{a}{b} = \frac{8}{3}$ és $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, számítsd ki $\frac{a}{c}$ értékét!

b) Ha $a \cdot c = 38$ és $b \cdot c = 19$, számítsd ki $\frac{a}{b}$ és $\frac{a+b}{a-b}$ értékét!

Jegyezd meg!

Adott egyenlőségből kiindulva vele ekvivalens egyenlőséget kaphatunk a következő átalakításokkal:
- az egyenlőség mindkét oldalához hozzáadjuk vagy kivonjuk ugyanazt a valós számot.
- az egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző valós számmal.
- ha az egyenlőség mindkét oldala pozitív szám, akkor ekvivalens egyenlőséget így is kaphatunk:
  a) az egyenlőség mindkét oldalát felemeljük n-edik hatványra, ahol n egész szám.
  b) az egyenlőség mindkét oldalából gyököt vonunk.

Matematikai **azonosságnak nevezzük** azt az egyenlőséget, mely egy vagy több változót tartalmaz, és igaz minden értékre, amit a változók felvehetnek.

Gyakorlatok és feladatok

1. Ha $a = 7$ és $b + c = 77$, akkor számítsd ki:
a) $77 \cdot a + 3 \cdot b + 3 \cdot c$; b) $88 \cdot a - 7 \cdot b - 7 \cdot c$.

2. Határozd meg az n számot tudva, hogy $a - b - 1 = 5$ és $n = -3 \cdot a + 19 + 3 \cdot b$.

3. Tudva, hogy $x + 4 \cdot y = 3 \cdot y + 2 \cdot z = 14$. határozd meg az $m = 5 \cdot x + 11 \cdot y - 6 \cdot z$.

4. Az x és y szám teljesíti az $x \cdot (y + 3) + y = 98$. egyenlőséget. Határozd meg az x és y számot tudva, hogy $x < y$.

5. Igazak a következő egyenlőségek $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, $\frac{c}{b} = \frac{7}{5}$, $\frac{c}{d} = \frac{7}{11}$, $\frac{d}{x} = \frac{11}{183}$. Hasonlítsd össze az $\frac{a}{x}$ és 62^{-1}.

6. Ha $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ és $a \cdot b = 6$, $b \cdot c = 12$, $c \cdot a = 8$, számítsd ki $a \cdot b \cdot c$ és $a^2b^2c + ab^2c^2 + a^2bc^2$ értékét!

7. Számítsd ki $7a + 4b + 7x + 4y$ értékét, ha $a + x = 10$ és $b + y = 8$.

8. Ha $a + b = 21$ és $x + y = 15$, számítsd ki $a + b - x - y$ értékét!

9. Ha $a + b = 15$ és $b + c = 23$, számítsd ki $7a + 10b + 3c$ és $7a + 4b - 3c$ értékét.

10. Ha $a - 2b = 1$, $2b - 3c = 2$, $3c - 4d = 2$ és $4d - 5e = 1$, számítsd ki $a - 5e$ értékét!

2.2. $a \cdot x + b = 0$, alakú egyenletek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Egyenlet megoldáshalmaza. Ekvivalens egyenletek

Emlékeztető

1) Tanultuk az $a \cdot x + b = 0$ alakú, racionális együtthatós egyenletek megoldását a racionális számok halmazán vagy annak valamely részhalmazán.

Példák.
1) $\mathbb{Q}$-ben, a $6 \cdot x + 3 = 0$ egyenlet megoldása $x = -0{,}5$.
2) $\mathbb{Z}$-ben, a $3 \cdot x + 6 = 0$ egyenlet megoldása $x = -2$.
3) $\mathbb{N}$-ben, a $2 \cdot x + 6 = 0$ egyenletnek nincs megoldása.

Az a és b számokat az egyenlet együtthatóinak, az x-et az egyenlet ismeretlenének nevezzük.

A b számot az egyenlet szabad tagjának is nevezzük

ismeretlen

$$a \cdot x + b = 0$$

ismeretlen együtthatója szabad tag

2) Két egyenlet ekvivalens, ha ugyanazon a halmazon értelmezzük, és megoldásaik megegyeznek.

a) A $2x - 7 = 5$, $x \in \mathbb{Z}$ és $8 - x = 2$, $x \in \mathbb{Z}$ egyenletek ekvivalensek, mert mindkét egyenlet megoldása $x = 6$.
b) A $2x = 8$, $x \in \mathbb{Q}$ és $x - 3 = 4$, $x \in \mathbb{Q}$ nem ekvivalens egyenletek, mivel az első egyenlet megoldása $x = 4$, a másodiké pedig $x = 7$.

Meg szeretnék oldani a valós számok halmazán vagy annak egy részhalmazán az $a \cdot x + b = 0$, alakú egyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

Fedezzük fel, értsük meg!

	A. Feladat	**B. Egyenlet**
1	Legyen $D = \{-1, \sqrt{2}, 3\}$. Határozd meg az $x \in D$, számokat, melyre igaz a $\sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$ egyenlőség.	Oldd meg a $D = \{-1, \sqrt{2}, 3\}$ halmazon a $\sqrt{2} \cdot x - 2 = 0$ egyenletet.
2	Határozd meg azon x valós számokat, melyekre igaz a $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$ egyenlőség.	Oldd meg $\mathbb{R}$-ben a $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$ egyenletet.

Azt a D halmazt, melynek az egyenlet megoldása eleme kellene legyen, vagy azt a halmazt melyben az egyenlet kifejezései értelmezettek, az egyenlet **értelmezési tartomány**ának nevezzük.

Az értelmezési tartomány azon elemeit, melyekre igaz az egyenlőség, az egyenlet **megoldásai**nak nevezzük.
Megjegyzés: Az egyenlet megoldásainak halmaza az értelmezési tartomány részhalmaza.
Megoldani az egyenletet azt jelenti, hogy meg kell határozni az összes megoldását tartalmazó M halmazt.

Másold a füzetbe az alábbi táblázatot, majd tölts ki a modell alapján:

Feladat	Értelmezési tartomány	együtthatók	szabad tag	ismeretlen
Oldd meg $\mathbb{Z}$-ben a: $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$ egyenletet.	$\mathbb{Z}$	$-\sqrt{3}$ és $2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	x
Oldd meg $\mathbb{R}$-ben: $\sqrt{2} \cdot t + 2 = 0$ egyenletet				t
Oldd meg ... -ben az: .... egyenletet	$\mathbb{R}$	-7 és $0{,}3$	$0{,}3$	y
Oldd meg ... -ben az: .... egyenletet	$\mathbb{Q}$	$\sqrt{2}$ és $-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	z

Oldjuk meg figyelmesen!

A. Az egyenlet megoldásainak meghatározásában nagyon fontos a D értelmezési tartomány ismerete, melyben megoldjuk az egyenletet. Ha nem adják meg pontosan az egyenlet értelmezési tartományát, azt úgy tekintjük mint az összes olyan szám halmazát, melyben az egyenlet értelmezett. VII. osztályban a legtöbb egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R}$.

1) Oldd meg $A = \{-1, 0, 3\}$-ban az $x - \sqrt{3} = 0$ egyenletet!	$-1 - \sqrt{3} \neq 0$; $0 - \sqrt{3} \neq 0$; $3 - \sqrt{3} \neq 0$.
2) Oldd meg $\mathbb{Q}$-ben az $x - \sqrt{3} = 0$ egyenletet!	Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor $(x - \sqrt{3}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tehát $x - \sqrt{3} \neq 0$
3) Oldd meg az $x - \sqrt{3} = 0$ egyenletet!	Könnyen észrevehető, hogy $x = \sqrt{3}$ az egyenlet egyetlen valós megoldása.
Következmény: Az egyenletnek lehet megoldása egy halmazban, és lehetséges, hogy nincs megoldása egy másik halmazban.	

B. Az $a \cdot x + b = 0$ egyenlet megoldása a valós számok halmazán, ha $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Előbb foglalkozzunk az $a \cdot x + b = 0$ alakú egyenletekkel, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy: $a \cdot x + b = 0 \;\big|\; -b \Leftrightarrow a \cdot x = -b \;\big|\; :a \Leftrightarrow x = -\dfrac{a}{b}$, amely valós szám és az egyenlet egyetlen megoldása. Felírhatjuk, hogy $M = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

2) A gyakorlatban előfordul, hogy az egyenletet ekvivalens egyenletekké alakítva az alakja $a \cdot x + b = 0$ lesz, de nem tudjuk, hogy a értéke nullától különböző.
Ha $a = 0$, az $a \cdot x + b = 0$ egyenlet $0 \cdot x + b = 0$ lesz, $b \in \mathbb{R}$.
A következő két eset lehetséges:
a) $b = 0$ és az egyenlőség igaz az x minden valós értékére, tehát $M = \mathbb{R}$.
b) $b \neq 0$ és az egyenlőség hamis az ismeretlen összes valós értékére, tehát $M = \varnothing$.

Alkalmazás

Gyakran olyan egyenleteket kell megoldjunk, amelyek nem $a \cdot x + b = 0$ alakúak, de ekvivalensek ilyen alakú egyenletekkel. Azért, hogy az együtthatókat meghatározzuk és a megoldási folyamatot alkalmazzuk, szükséges az egyenlet átalakítása több ekvivalens egyenletté. Az így kapott egyenlet ekvivalens az eredeti egyenlettel, vagyis megoldásaik megegyeznek.

A követendő lépések:

1) Az egyenletet $a \cdot x + b = 0$ alakba hozzuk, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Alkalmazzuk az egyenlet megoldási algoritmusát.
3) Figyelembe véve az egyenlet értelmezési tartományát, leírjuk az egyenlet megoldáshalmazát.

Megjegyzés: Ha az egyenletet csak megoldani szeretnénk, akkor a megoldási algoritmus a követező:
a) Átrendezzük a tagokat (a baloldal tartalmazza az ismeretlen tagokat, a jobboldal pedig azokat a tagokat, melyek között nem szerepel az ismeretlen)
b) Elvégezzük mindkét oldalon a számításokat.
c) Meghatározzuk az egyenlet megoldáshalmazát.

1. példa. Oldd meg $\mathbb{R}$ -ben a $3(0,5x + 1) - 7 = 8$ egyenletet!

I. megoldás:

$3(0,5x + 1) - 7 = 8 \;\big|\; +7 \Leftrightarrow$
$3(0,5x + 1) = 15 \;\big|\; :3 \Leftrightarrow$
$0,5x + 1 = 5 \;\big|\; -1 \Leftrightarrow$
$0,5x = 4 \;\big|\; \cdot 2 \Leftrightarrow$
$x = 8 \Rightarrow M = \{8\}$

II. megoldás:

$3(0,5x + 1) - 7 = 8 \Leftrightarrow$
$1,5x + 3 - 7 = 8 \Leftrightarrow$
$1,5x - 4 = 8 \Leftrightarrow$
$1,5x = 12 \Leftrightarrow$
$x = 12 : 1,5 \Leftrightarrow$
$x = 8 \Rightarrow M = \{8\}$

2. példa. Oldd meg $\mathbb{R}$-ben a $\dfrac{8x-1}{4}=\dfrac{6x+1}{3}$ egyenletet!
Megoldás: $3(8x-1)=4(6x+1) \Leftrightarrow 24x-3=24x+4 \Leftrightarrow -3=4$, hamis kijelentés, tehát $M=\varnothing$.

3. példa. Oldd meg $\mathbb{R}$-ben az $5(2x+1)-3=8-2(3-5x)$ egyenletet!
Megoldás: $10x+5-3=8-6+10x \Leftrightarrow 2=2$, ami igaz reláció az x minden valós értéke esetén, tehát $M=\mathbb{R}$.

4. példa. Oldd meg $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$ a $\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{2}{x}$ egyenletet!
Megoldás: Az egyenlet értelmezési tartománya $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$ mivel az ismeretlen 0 és 4 értékei esetén a nevező 0, és a tört értelmetlen.

$$\frac{3}{x-4}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow 3\cdot x=2\cdot(x-4) \Leftrightarrow 3\cdot x=2\cdot x-8 \Leftrightarrow x=-8, \text{ tehát } M=\{-8\}.$$

Néha az egyenlet megoldása több $a\cdot x+b=0$ alakú egyenlet megoldását jelenti, ahol $a,b\in\mathbb{R}$. A megoldások száma függ az értelmezési tartománytól.

5. példa. Oldd meg az $(x-1)(2x-3)(x+4)=0$ egyenletet a következő halmazokon: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.
Az egyenlet megoldása során felhasználjuk a következő matematikai tulajdonságot:
ha a és b valós számok és $a\cdot b=0$, akkor $a=0$ vagy $b=0$.

$(x-1)(2x-3)(x+4)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ vagy $2x-3=0$ vagy $x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ vagy $x=1{,}5$ vagy $x=-4$.

a) $\mathbb{R}$-ben $M=\{1;-4;1{,}5\}$. b) $\mathbb{Q}$-ben $M=\{1;-4;1{,}5\}$. c) $\mathbb{Z}$-ben $M=\{1;-4\}$. d) $\mathbb{N}$-ben $M=\{1\}$.

Az egyenlet megoldásának becslése

Oldjuk meg a következő feladatot: Egy halászhajó legtöbb 20 tonna halat tud szállítani. Miután befogadóképességének 95%-át megtelt a hajó visszatér a kikötőbe. Tudva, hogy egy hal átlag súlya körülbelül 700 gramm, becsüld fel ezresekben a hajó által szállított halak számát!

Megoldás: Ahhoz, hogy felírhassunk egy egyenletet, ugyanabban a mértékegységben adjuk meg egy hal illetve a teljes rakomány súlyát. Optimális, ha kilogrammot használunk. 700 g = 0, 7 kg; 20 t = 20000 kg.

Jelöljük a szállított halak számát x-szel. Felbecsüljük a $0{,}7\cdot x=\dfrac{95}{100}\cdot 20\,000$ egyenlet megoldását.

Ekvivalens egyenleteket használva: $0{,}7\cdot x=19\,000 \Leftrightarrow x=\dfrac{190\,000}{7}\approx 27000$ (hal)

Gyakorlatok és feladatok

1. Az a, b, c, d valós számok, $d\neq 0$ és $a=b$. Egészítsd ki a hiányzó részeket úgy, hogy a kijelentések igazak legyenek:
p_1: $a+c=b+\ldots$;
p_2: $b-c=a-\ldots$;
p_3: $a\cdot c=b\cdot\ldots$;
p_4: $b:d=a:\ldots$;
p_5: $a^n=\ldots^n$;
p_6: Ha $a\geq 0$, $b\geq 0$ akkor $\sqrt{a}=\ldots$.

2. Adott a $0{,}25\cdot x+2=0$ egyenlet.
a) Ellenőrizd, hogy az adott egyenletnek van megoldása az $A=\{-4, 0, 4\sqrt{2}\}$ halmazon.
b) Döntsd el, hogy az adott egyenletnek van-e egész megoldása!

3. Ellenőrizd, hogy $x=-\sqrt{2}$ az alábbi egyenletek közül melyiknek megoldása:
a) $x+2=0$; b) $2-x=0$;
c) $2\cdot x+\sqrt{8}=0$; d) $\dfrac{x}{\sqrt{2}}+1=0$.

4. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $x+\sqrt{2}=\sqrt{8}$; b) $4{,}5\cdot x+9=13{,}5$

c) $\sqrt{3}\cdot x-2=1$; d) $-3\frac{1}{2}\cdot x-1{,}5=\sqrt{2}^2$;

e) $\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{12}=\sqrt{27}$; f) $x\cdot\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$;

g) $\sqrt{18}\cdot x+9=0$; h) $\sqrt{24}\cdot x=0$.

5. Írj három $a\cdot x+b=0$, alakú egyenletet, melynek van megoldása a $B=\left\{-1,\ 0,\ \sqrt{2},\ \frac{5}{2}\right\}$ halmazban.

6. Határozd meg az alábbi halmazokat:

$A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{7}\cdot x+1=\sqrt{7}+1\right\}$;

$B=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,\frac{2}{5}\cdot x+3=5{,}4\right\}$;

$C=\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,\middle|\,1+\sqrt{7}\cdot x=\sqrt{8}+1\right\}$;

$D=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{\sqrt{3}\cdot x}{3}-\frac{3}{\sqrt{3}}=0\right\}$.

7. a) Oldd meg a valós számok halmazán a $3x-57=0$ és $-5x+95=0$ egyenleteket, majd írd fel az első egyenlet M_1 megoldáshalmazát illetve a második egyenlet M_2 megoldáshalmazát!

b) Határozd meg az M_1 és M_2 halmazok közötti relációt!

8. Ha $x\in\mathbb{R}$, bizonyítsd be, hogy a következő egyenletpárok ekvivalensek:

a) $-1{,}5\cdot x+0{,}75=0$ és $\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}=0$;

b) $\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{8}=0$ és $-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot x-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0$.

9. Bizonyítsd be, hogy a következő egyenletpárok nem ekvivalensek:

a) $3x-6=0$ és $6x-3=0$;

b) $\frac{x}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}=0$ és $9x+1{,}6=0$.

10. Határozd meg az a szám valós értékeit, ha a $0{,}1\cdot x+\frac{6}{5}=0$ és $\frac{3}{4}\cdot x+a=0$, egyenletek ekvivalensek!

11. Oldd meg az egész számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $3x+7=x+21$; b) $0{,}5x+3=0{,}25x+4$;

c) $2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot x=\sqrt{48}$; d) $(x-2)\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)=0$;

e) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=2\cdot 3$; f) $-3\cdot(x+1)=2\cdot(x+6)$;

g) $\frac{x-1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{x-5}{6}+\frac{1}{12}$.

12. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $\sqrt{3}\cdot x+3=0$; b) $-\sqrt{5}\cdot x+10=\sqrt{20}\cdot x-20$;

c) $\frac{y-\sqrt{2}}{3}+\frac{y+\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}+y$;

d) $\left(y-\sqrt{3}\right)\cdot\left(y-\sqrt{5}\right)=0$; e) $\left|7-\sqrt{7}\cdot x\right|=14$.

13. Oldd meg a racionális számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right)$;

b) $\sqrt{3}\cdot x+1=x+\sqrt{3}$; c) $\frac{x-2}{3}=\frac{4-x}{2}$;

d) $\frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

e) $\frac{3y+7}{5}-0{,}1+\frac{3-2y}{2}=0{,}3\cdot(4y-5)$.

14. Határozd meg az alábbi egyenletek valós megoldásainak halmazát:

a) $\frac{7}{x-3}=\frac{8}{x-5}$; b) $\left(x+\sqrt{2}\right)^2=8$;

c) $|x-4|-|x+1|=0$;

d) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+\ldots+\frac{x+9}{10}-9=0$.

15. a) Írj egy olyan egyenletet, melynek egyetlen megoldása van az $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ halmazban!

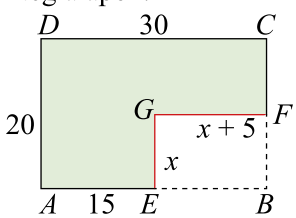
b) Írj egy olyan egyenletet, melynek egyetlen megoldása van az $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ halmazban!

c) Írj egy olyan egyenletet, melynek végtelen sok valós megoldása van!

d) Írj egy olyan egyenletet, melynek nincs egyetlen valós megoldása sem!

16. Határozd meg az m valós számot, ha -3 az $x-2=m\cdot x+4$ egyenlet megoldása, ahol x az ismeretlen.

17. a) Szerkessz egy x ismeretlent tartalmazó, $a\cdot x+b=0$ alakba hozható egyenletet, a mellékelt ábra alapján, ha $ABCD$ és $BEGF$ téglalapok.



b) Oldd meg az a) alpontban írt egyenletet!

c) Határozd meg a GE és GF szakaszok hosszát!

Ismeretfelmérő

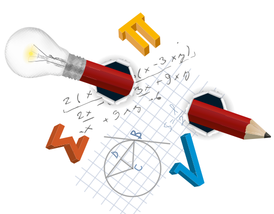
Hivatalból: 10 pont

I. *Írd ki mindenik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** Az alábbi egyenletek közül melyiknek megoldása a –2 szám? A. $2\cdot x-4=0$ B. $\sqrt{3}\cdot x-\sqrt{12}=0$ C. $\|-4\|\cdot x=8$ D. $5\cdot x+10=0$
5p	**2.** Az $5\cdot x+3=x-m$ egyenlet megoldása –1, ha m egyenlő: A. 1 B. 2 C. –1 D. –2
5p	**3.** A $2\cdot x-\frac{1}{2}=3\cdot x-\frac{1}{3}$ egyenlet megoldása: A. 1 B. $-\frac{1}{3}$ C. 6 D. $-\frac{1}{6}$
5p	**4.** Az a szám azon értéke, melyre a $8-3\cdot x=11$ és $2\cdot x+a=3\cdot a\cdot x+10$ egyenletek ekvivalensek: A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5p	**5.** A $\|3\cdot x-1\|+1=6$ egyenlet megoldáshalmaza: A. $\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$ B. $\left\{-\frac{3}{4},2\right\}$ C. $\left\{-\frac{4}{3},-1\right\}$ D. $\left\{-\frac{3}{4},-2\right\}$
5p	**6.** Ha $\sqrt{x+222}=22,$ akkor x értéke: A. 264 B. 262 C. –200 D. 200

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

	1. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:
10p	a) $5\cdot\{4\cdot[3\cdot(2\cdot x+1)+1]+1\}-44=876$
10p	b) $\frac{x-1}{4}+1=x-\frac{x-3}{2}+0,25$
10p	c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(x-2)+\sqrt{48}=\sqrt{12}$
10p	d) Az adott három egyenlet között találhatóak ekvivalens egyenletek?
	2. Adott az $n=\frac{3\cdot a+19}{5}$ és $m=\frac{2\cdot a+91}{5}$ szám, ahol a egy természetes szám.
10p	a) Mutasd ki, hogy ha $n\in\mathbb{N}$, akkor $m\in\mathbb{N}$.
10p	b) Határozd meg az a szám azon értékét, melyre igaz, hogy n és m egymásutáni természetes számok.



2.3. Két kétismeretlenes lineáris egyenletből álló egyenletrendszer. A helyettesítés és/vagy a kiküszöbölés módszere

1.ℓ. Két kétismeretlenes lineáris egyenletből álló egyenletrendszer

Oldjuk meg figyelmesen!

Feladat
Egy kosárlabda mérkőzésen Ádám 20 pontot szerzett 3 illetve 2 pontos dobásokból (legalább egyet mindegyikből). Határozd meg, hány 3 pontos, illetve hány 2 pontos kosarat dobott Ádám?

Átfogalmazás

Ha x a szerzett 3 pontos dobások, illetve y a szerzett 2 pontos dobások száma, akkor meg kell határoznunk az x és y nullától különböző értékeit, melyekre igaz a $3x + 2y = 20$ egyenlőség.

Megoldás. Mivel x és y nullától különböző természetes számok, könnyen beláthatjuk, hogy x páros szám és $2 \le x \le 6$.

Tehát: $x = 2$ és $y = 7$ vagy $x = 4$ és $y = 4$ vagy $x = 6$ és $y = 1$.

A megoldások ilyen felírása nem célszerű. Helyette így írjuk: (2, 7), (4, 4), (6, 1).

A megoldott feladatot elemezve észrevesszük, hogy:

a) A $3x + 2y = 20$ egyenlet kapcsolatot teremt a szerzett 3 pontos illetve 2 pontos dobások között.

b) Az egyenletnek több megoldása van, tehát a feladatnak is több megoldása van.

c) Az x minden értéke csak az y valamely értékével együtt teljesíti az egyenlőséget (egyenletet), amely azt jelenti, hogy az egyenlet megoldásának egy számpárt tekintünk, ahol a számok sorrendje azonos az egyenletben szereplő ismeretlenek sorrendjével (*rendezett számpár*).

Kétismeretlenes lineáris egyenletnek nevezzük az $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ alakú egyenletet, ahol a, b, c valós számok. Az a, b, c valós számokat az **egyenlet együtthatóinak** nevezzük, c a **szabad tag**, valamint x és y az **egyenlet ismeretlen tagjai** ebben a sorrendben.

Megjegyzés

a) Az x és y ismeretlenek valós számokat jelölnek, vagy a valós számok egy részhalmazának elemeit.

b) Az ismeretleneket más betűvel is jelölhetjük, viszont fontos az egyenletbeli sorrendjük.

Példák. Egészítsd ki a táblázat üres celláit:

Egyenlet	ismeretlenek	együtthatók	szabad tag
1) $2x + 3y - 8 = 0$	x és y	$a = 2;\ b = 3;\ c = -8$	$c = -8$
2) $9x - 4{,}5y = 1 \Leftrightarrow 9x - 4{,}5y - 1 = 0$			
3) $y\sqrt{3} + 2t = -1 \Leftrightarrow$	y és t		
4) …………………... = 0	x és y	$a = -1;\ b = \sqrt{2};\ c = 1 - \sqrt{2}$	$c = 1 - \sqrt{2}$

Válaszolni szeretnénk a következő kérdésekre:

1) Mit jelent egy kétismeretlenes lineáris egyenlet megoldása?

2) Hány megoldása van egy ilyen egyenletnek?

Oldjuk meg figyelmesen!

1) Határozd meg az x és y természetes számot, ha $x - y = 5$.

Észrevesszük, hogy: $5 - 0 = 5$; $6 - 1 = 5$; $7 - 2 = 5$; $8 - 3 = 5$; $9 - 4 = 5$ …

Minden $x \geq 5$, természetes szám esetén találunk egy $y = x - 5$ természetes számot úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség. Mindegyik $(x,\ x - 5)$ rendezett **természetes** számpár az egyenlet megoldása.

2) Határozd meg az x és y valós számokat, melyre igaz, hogy $x - y = 5$.

Az 1) pontnál kapott számpárokon kívül, mindegyik x valós szám esetén találunk egy $y = x - 5$, valós számot úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség. Mindegyik $(x,\ x - 5)$ rendezett **valós** számpár az egyenlet megoldása.
Példák megoldásra: $(8{,}7;\ 3{,}7)$, $(5+\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

Fedezzük fel, értsük meg!

Megjegyzés. Hangsúlyozzuk, hogy a lineáris kétismeretlenes egyenletek megoldása egy számpár. A számpárok felírása nem véletlenszerű, hanem a számpárt alkotó számok sorrendje azonos az egyenletben szereplő ismeretlenek sorrendjével.

Ha az egyenlet megoldását (0, 7) számpárként írjuk, akkor tudjuk, hogy: ha az első ismeretlen (általában x) értéke 0, és a második ismeretlen (általában y) értéke 7, akkor fennáll az egyenlőség (teljesítik az egyenletet).

a) Az (a, b) számpár akkor és csakis akkor rendezett, ha $a \neq b$ esetén $(a, b) \neq (b, a)$.
b) Két (a, b) és (c, d) rendezett számpár akkor és csakis akkor **egyenlő**, ha $a = c$ és $b = d$.

Példa. $(1, 3) \neq (3, 1)$

Példa. a $(4^2, 1^5)$ és $(2^4, 5^0)$ számpárok egyenlőek.

A lineáris kétismeretlenes egyenlet **megoldása** minden *rendezett számpár*, mely teljesíti az egyenletet.

Példa. a (0, 7), (1, 5), (2, 3), (3, 1) számpárok a $2x + y = 7$, egyenlet lehetséges megoldásai, ahol x és y számjegyek.

Ha x és y valós számok, akkor a kétismeretlenes elsőfokú egyenletnek **végtelen sok megoldása** van.

Példa. bármely $(\alpha,\ 7 - 2\alpha)$ alakú számpár, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, megoldása a $2x + y = 7$, egyenletnek, ahol $x, y \in \mathbb{R}$.

Ha $a = 0$, akkor az egyenlet $0 \cdot x + b \cdot y + c = 0$, és megoldásai $\left(x, -\dfrac{c}{b}\right)$ alakúak.

Ha $b = 0$, akkor az egyenlet $a \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$, és megoldásai $\left(-\dfrac{c}{a}, y\right)$ alakúak.

Azon rendezett számpárok halmazát, melyek teljesítik az egyenletet, az egyenlet **megoldáshalmazának** nevezzük.

Tulajdonképpen egy lineáris kétismeretlenes egyenletet úgy kapunk meg, ha matematikailag leírjuk miképpen függ két mennyiség egymástól.

***Feladat*:** Sára egy tömbház A lépcsőházában lakik, melyben 16 lakás van: 2 és 3 szobásak, összesen 36 szoba. Határozzuk meg a kétszobás illetve háromszobás lakások számát!

Megoldás: Feltételezzük, hogy x a kétszobás lakások, illetve y a háromszobás lakások száma.
Akkor $x + y = 16$ és $2x + 3y = 36$.
Mivel x és y természetes számok, könnyen belátható, hogy $x = 12$ és $y = 4$.

Betartjuk a következő egyezményeket:

1) Egymás alá írjuk az egyenleteket, összekapcsoljuk egy kapcsos zárójellel, ezalatt azt értve, hogy a két egyenlet egyidejűleg kell teljesüljön.
2) A tagok sorrendje mindkét egyenletben ugyanaz. Azt mondjuk, hogy felírtunk egy rendszert, amely két lineáris kétismeretlenes egyenletből áll.
3) Hasonlóan a lineáris egyenletekhez, az egyenletrendszer megoldásait is rendezett számpár alakjában írjuk fel.

Két kétismeretlenes lineáris egyenlet egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert alkot.
A kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakja $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, ahol $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$.

Az $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ számokat a rendszer együtthatóinak nevezzük; a_1, b_1, a_2, b_2 az **ismeretlenek együtthatói**, c_1, c_2 neve **szabad tag**

Meghatározás. Egy valós számokból álló rendezett számpárt az egyenletrendszer megoldásának nevezünk, ha a rendszert alkotó mindkét egyenletnek a megoldása.

Példák.

1) $\begin{cases} x + 5y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 7y - 5 = 0 \\ 2x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -x\sqrt{2} - y = 1 \\ 2x\sqrt{2} + y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

Példa.
A fenti 3) rendszer esetén, $a_1 = 3,\ b_1 = 7,\ c_1 = 5,$ $a_2 = 2,\ b_2 = -4,\ c_2 = -9.$

Példa. $3 + 5 \cdot 1 = 8$ és $2 \cdot 3 + 1 = 7$, tehát a (3,1) számpár az $\begin{cases} x + 5y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ rendszer megoldása

Megoldani egy rendszert azt jelenti, hogy meg kell keresni összes megoldásának halmazát. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem más, mint a két egyenlet megoldáshalmazának metszete.

Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha ugyanaz a megoldáshalmazuk.

Megjegyzés. Ha a rendszer egyik vagy mindkét egyenletét kicseréljük vele ekvivalens egyenlettel, akkor a rendszerrel ekvivalens másik rendszert kapunk.
Példa. Kiindulva a:
$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 7x - 6y = 20 \end{cases}$ rendszerből, átalakítva $\begin{cases} 3x + 4y = 2 & | \cdot 3 \\ 7x - 6y = 20 & | \cdot 2 \end{cases}$ a $\begin{cases} 9x + 12y = 6 \\ 14x - 12y = 40 \end{cases}$ ekvivalens rendszert kapjuk

Ha a rendszer egyenleteit tagonként összeadjuk, akkor egy új egyenletet kapunk. Ha a rendszer egyik egyenletét kicseréljük ezzel az új egyenlettel, akkor az eredetivel ekvivalens rendszert kapunk.

Példa. Adott a $\begin{cases} -5x + 9y = 4 \\ 7x - 5y = 2 \end{cases}$ rendszer. Tagonként összeadva a két egyenletet azt kapjuk, hogy: $2x + 4y = 6$.

A $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 7x - 5y = 2 \end{cases}$ és $\begin{cases} -5x + 9y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ rendszerek ekvivalensek. Elegendő az egyik rendszer megoldáshalmazát meghatározni.

Gyakorlatok és feladatok

1. Ellenőrizd, hogy a (4, 7), (3, –4), (2, –7), (7, 4) számpárok közül melyek a $4x - 2y = 20$ egyenlet megoldásai.

2. Ellenőrizd, hogy a $(\sqrt{3}, 1), (1, \sqrt{3}), (2\sqrt{3}; -0{,}5), (-\sqrt{3}, 4)$ számpárok közül melyek a $x\sqrt{3} + 2y = 5$ egyenlet megoldásai

3. Mutasd ki, hogy a $(3 - 2m, m)$ számpár, ahol $m \in \mathbb{R}$, az $x + 2y = 3$ egyenlet megoldása.

4. Ellenőrizd, hogy a $(2\sqrt{2}, 0)$ számpár az $\begin{cases} x\sqrt{2} - y = 4 \\ 0{,}5 \cdot x + 5y = \sqrt{2} \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása!

5. Adottak az alábbi, két lineáris egyenletből álló rendszerek, ahol az ismeretlenek x és y:
1) $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$.
Ellenőrizve válaszd ki azt a rendszert, melynek az (5; 4) számpár megoldása!

6. a) Határozz meg két olyan természetes számpárt, melyre teljesül a $(2x + y - 4)^2 = 0$ egyenlőség!
b) Írd fel egyenletrendszer formájában az $|x - y + + 1| + (2x + y - 4)^2 = 0$ egyenlőségből kapott egyenleteket!.
c) Ellenőrizd, hogy az a) alpontban kapott számpárok az egyenletrendszer megoldásai-e!

2.ℓ. A helyettesítés és a kiküszöbölés módszere

Emlékeztető

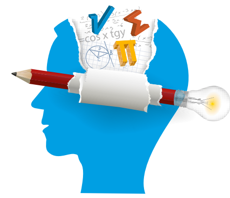
Tekintsünk egy rendszert, mely két kétismeretlenes lineáris egyenletből áll.

- Ha kicseréljük a rendszer egyik vagy mindkét egyenletét ekvivalens egyenlettel, akkor az eredetivel ekvivalens rendszert kapunk.
- Összeadva tagonként a rendszer két egyenletét egy új egyenletet kapunk.
- Ha a rendszer egyik egyenletét kicseréljük ezzel az egyenlettel, akkor az eredetivel ekvivalens rendszert kapunk.

Megoldani egy lineáris egyenletrendszert azt jelenti, hogy meg kell határozni azt a halmazt, amely tartalmazza az összes lehetséges megoldását.

Legtöbbször a **kiküszöbölés** és a **helyettesítés módszerét** használjuk, illetve az egyenlőségek újabb ekvivalens egyenlőségekké alakítását.

Fedezzük fel, értsük meg!



A helyettesítés módszere - A megoldás folyamata

1. Kiválasztjuk azt az ismeretlent, melyet helyettesíteni szeretnénk.	Adott az $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-7y=3 \end{cases}$ rendszer. Kiválasztjuk az x ismeretlent, amelyet helyettesíteni szeretnénk.
2. Kifejezzük az egyik egyenletből a választott ismeretlent a másik függvényében.	Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 2 + 3y$.
3. A másik egyenletben helyettesítjük a kiválasztott ismeretlent, használva a kapott összefüggést.	A $2x - 7y = 3$ egyenletben az x-et helyettesítjük $2 + 3y$-nal és azt kapjuk, hogy $2(2 + 3y) - 7y = 3$
4. Megoldjuk a kapott egyenletet, és meghatározzuk az egyik ismeretlent.	$4 + 6y - 7y = 3$ $-y = -1$ $y = 1$
5. A kapott értéket behelyettesítjük valamelyik egyenletbe, és meghatározzuk a másik ismeretlent.	Az $x = 2 + 3y$, összefüggésben az y ismeretlent helyettesítjük 1-gyel, és így $x = 5$ lesz.
6. Leírjuk a rendszer megoldását.	$x = 5$, $y = 1$, tehát $M = \{(5, 1)\}$.

A kiküszöbölés módszere - A megoldás folyamata

1. Ha szükséges, akkor úgy rendezzük át az egyenleteket, hogy a megfelelő ismeretlenek ugyanúgy helyezkedjenek el (x az x alatt, y az y alatt).	Átrendezzük a $\begin{cases} 7y+2x=8 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ rendszert, azaz $\begin{cases} 2x+7y=8 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$.
2. Kiválasztjuk azt az ismeretlent, melyet kiküszöbölnénk.	$\begin{cases} 2x+7y=8 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ Kiválasztjuk az x ismeretlent.
3. Ha szükséges, akkor az egyenleteket megszorozzuk vagy osztjuk nullától különböző számmal úgy, hogy az egyenletekben a kiválasztott ismeretlen együtthatói ellentétes számok legyenek.	$\begin{cases} 2x+7y=8 & \mid\cdot 3 \\ 3x-4y=5 & \mid\cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+21y=24 \\ -6x+8y=-10 \end{cases}$

4. Összeadjuk a két egyenletet, ezzel kiküszöböljük a választott ismeretlent.

$$\begin{cases} 6x + 21y = 24 \\ -6x + 8y = -10 \end{cases} \quad (+)$$
$$29y = 14$$

5. Megoldjuk a kapott egyenletet.

$$y = \frac{14}{29}$$

6. Megismételjük a 3., 4. és 5. lépést a másik ismeretlen esetén.

$$\begin{cases} 2x + 7y = 8 \;|\cdot 4 \\ 3x - 4y = 5 \;|\cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 28y = 32 \\ 21x - 28y = 35 \end{cases} (+)$$
$$29x = 67 \Rightarrow x = \frac{67}{29}$$

7. Leírjuk a rendszer megoldását.

$$x = \frac{67}{29},\ y = \frac{14}{29} \text{ és } M = \left\{\left(\frac{67}{29}, \frac{14}{29}\right)\right\}$$

Alkalmazás

Megjegyzés. A gyakorlatban, időtakarékosság céljából, a kiküszöbölés megoldási folyamatának 6. lépését kicserélhetjük erre: a kapott értéket behelyettesítjük valamelyik egyenletbe, és meghatározzuk a másik ismeretlent.

Példa. $\begin{cases} 5x - 3y = 7 & |\cdot 2 \\ 3x + 2y = 8 & |\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 6y = 14 \\ 9x + 6y = 24 \end{cases} \quad (+)$

$19x \quad = 38 \Rightarrow x = 2$

A $3x + 2y = 8$ egyenletben az x-et 2-vel helyettesítjük, majd azt kapjuk, hogy $6 + 2y = 8$, tehát $y = 1$ és $M = \{(2, 1)\}$.

Egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszernek lehet:

a) egyetlen megoldása

a) a $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$ rendszer egyetlen megoldása $M = \{(2, 1)\}$.

b) végtelen sok megoldása

b) az $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ -2x - 4y = -18 \end{cases}$ rendszernek végtelen sok megoldása van.

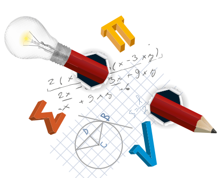
A rendszert alkotó egyenletek ekvivalensek.

$M = \left\{\left(m, \frac{9-m}{2}\right) \middle|\, m \in \mathbb{R}\right\}$ vagy $M = \{(9 - 2a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

c) nincs megoldása

c) az $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ rendszernek nincs megoldása, ugyanis kivonva egymásból a két egyenletet hamis kijelentést kapunk: $8 - 5 = 0$. Tehát $M = \varnothing$.

Megjegyzés: ha $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, a' és b' nullától különbözőek, akkor az $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ rendszernek egyetlen megoldása van.



Gyakorlatok és feladatok

1. Adottak az alábbi egyenletrendszerek:

a) $\begin{cases} x = 2 \\ y+1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=5 \\ x=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$

Oldd meg a rendszereket és írd fel mindegyik megoldáshalmazát.

2. Írj olyan két, lineáris kétismeretlenes egyenletből álló rendszert, melynek (1; –1) a megoldása!

3. Írd a következő lineáris egyenletrendszereket megfelelő formába, majd oldd meg helyettesítés módszerével!

a) $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 3x+y+13=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2x+y-1}{x+2}=2 \\ 5x-y=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=2 \\ -x+y=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+y=12 \\ \dfrac{1}{x}-2y=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x+y-1)-y=-3 \\ 3(x-y)-y=-3x \end{cases}$

4. Oldd meg helyettesítés módszerével:

a) $\begin{cases} 2(x+y+1)-3(2x-y-3)=12 \\ 4(2x-y-1)+3(3-x-y)=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{2}\cdot x+\sqrt{5}\cdot y=7 \\ \sqrt{5}\cdot x-\sqrt{2}\cdot y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y-1}=\dfrac{x}{y-8} \\ x-4\cdot y=6 \end{cases}$

5. Tekintsük azokat az x és y valós számokat, melyekre egyidejűleg teljesülnek a következő egyenletek:

(1) $x+y=101$ (2) $x-y=23$

a) Add össze tagonként a két egyenlőséget, oldd meg a kapott egyenletet, és határozd meg az x valós értékét!

b) Vond ki tagonként a két egyenlőséget egymásból, oldd meg a kapott egyenletet, és határozd meg az y valós értékét!

c) Írd fel a két lineáris egyenletből álló rendszer megoldásainak halmazát!

6. Oldd meg a kiküszöbölés módszerét használva az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} x+2y=11 \\ 8x-2y=-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+1=3y-7 \\ 3(x-y)+1=x+y-11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y=-10 \\ -x+2y=-5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6x+7y=4 \\ -2x+9y=-24 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3y=7{,}5 \\ 5x+y=-4{,}1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+11y=-1 \\ -2x+9y=17 \end{cases}$

7. Oldd meg a kiküszöbölés módszerét használva az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+y=13 \\ -\dfrac{x}{2}+y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+\dfrac{y}{3}=0{,}(3) \\ \dfrac{x}{2}-y=-\dfrac{25}{18} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x+y-1)=2x-y+6{,}5 \\ -2x+9y=-24 \end{cases}$

8. Határozd meg az a és b valós számokat az alábbi esetek mindegyikében:

a) $|a-1|+|a^2-b^2|=0$

b) $\left|\dfrac{a-2}{b-3}-\dfrac{1}{5}\right|+\left|\dfrac{a+3}{b+4}-\dfrac{2}{5}\right|=0.$

9. Oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket, előbb rendezve az egyenleteket, majd használd az előnyösebb megoldási módszert!

a) $\begin{cases} 2\cdot(x-1)+3\cdot\left(y+\dfrac{1}{3}\right)=4 \\ 12-6\cdot\left(y-\dfrac{1}{3}\right)=4\cdot(x+1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-\dfrac{3}{4}\cdot(x-y+1)=y-2 \\ y-\dfrac{2}{3}\cdot(y-x-1)=x+3 \end{cases}$

Ismeretfelmérő

Hivatalból: 10 pont

I. *Írd ki mindenik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** Melyik egyenlet megoldása a (3,1) számpár? A. $3 \cdot x + y = 11$ B. $3 \cdot x - y = 11$ C. $3 \cdot x + y = 10$ D. $3 \cdot x - y = 11$
5p	**2.** Ha az $\begin{cases} a \cdot x + y = 5 \\ 2 \cdot x + b \cdot y = 7 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása (–1, 3), akkor $a + b$ egyenlő: A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
5p	**3.** Az $\begin{cases} 4 \cdot x + y = 7 \\ 2 \cdot x - y = 5 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása: A. (2, 1) B. (1, 2) C. (2, –1) D. (–1, 2)
5p	**4.** Ha a és b két valós szám és $\lvert a - b + 1\rvert + \lvert a + 2 \cdot b - 3\rvert = 0$, akkor: A. $a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}$; B. $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$; C. $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$; D. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$.
5p	**5.** Ha az $\overline{ab}$ szám számjegyeinek összege 13 és teljesíti az $\overline{ab} - \overline{ba} = 27$ egyenlőséget, akkor $\overline{ab}$ egyenlő: A. 85 B. 76 C. 49 D. 94
5p	**6.** Teljesül a $2 \cdot a \cdot \sqrt{5} + b - 1 = b \cdot \sqrt{5} - 3 + a$ egyenlőség, ha: A. $a = -2, b = 4$ B. $a = -2, b = -4$ C. $a = 2, b = 4$ D. $a = 2, b = -4$

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

<table>
<tr><td>20p</td><td>1. Adott a $3x - 4y + 5 = 0$ egyenlet. Töltsd ki a mellékelt táblázatot úgy, hogy az (x, y) számpár az adott egyenlet megoldása legyen.
<table>
<tr><td>x</td><td>–3</td><td></td><td>0,6</td><td></td><td>$1+4\sqrt{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td>–1</td><td></td><td>1,4</td><td></td><td>a</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>20p</td><td>2. Oldd meg $\mathbb{R}$-ben az $\begin{cases} x + \dfrac{5 \cdot y - 1}{3} = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2 \cdot x + 3}{2} - 3 \cdot y = 10{,}5 \end{cases}$ egyenletrendszert!</td></tr>
<tr><td>20p</td><td>3. Határozd meg az a és b valós számokat tudva, hogy $\dfrac{a+1}{b} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{a}{b+1} = \dfrac{1}{5}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.</td></tr>
</table>

2.4. Egyenletekkel vagy lineáris egyenletrendszerekkel megoldható feladatok

Emlékeztető

Sok gyakorlati feladat matematikai úton is megoldható, aritmetikai vagy algebrai módszerekkel.

A mellékelt ábrán azon feladatok megoldási folyamata látható, melyek leírhatók egyismeretlenes lineáris (elsőfokú) egyenlettel, ahol az együtthatók és megoldások racionális számok.

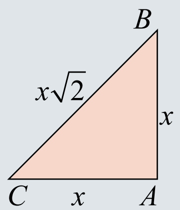
1. lépés. Az ismeretlen jelölése
↓
2. lépés. Az egyenlet felírása
↓
3. lépés. Az egyenlet megoldása
↓
4. lépés. A megoldás ellenőrzése és értelmezése

Két esetben vázoljuk a feladatok megoldási folyamatát:

1) amikor a feladat leírható olyan lineáris egyenlettel, melyben egy ismeretlen van, és együtthatói valós számok, valamint a megoldások is valós számok;

2) amikor a feladat leírható két olyan lineáris egyenlettel, melyben két ismeretlen van és együtthatóik valós számok, valamint a megoldások valós számpárok.

Feladat. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög kerülete $6+3\sqrt{2}$ (m). Határozd meg a háromszög oldalait!



Megoldás: A feladatot az alábbi lépéseket követve oldjuk meg.

1. lépés: Az egyik befogó hosszát x-szel jelöljük (*ismeretlen*).

2. lépés: Pitagorasz tételét használva kiszámoljuk az átfogó hosszát, ami $x\sqrt{2}$ lesz.

A háromszög kerülete $\mathcal{K} = x + x + x\sqrt{2}$.

Megállapítjuk a következő egyenletet: $2x + x\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$.

3. lépés: $2x + x\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x\left(2+\sqrt{2}\right) = 3\left(2+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x = 3$.

4. Lépés: $x = 3 \Rightarrow AB = AC = 3$ (m) és $BC = 3\sqrt{2}$ (m).

Ellenőrzés: $\mathcal{K} = x + x + x\sqrt{2} = 3 + 3 + 3\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$ (m)

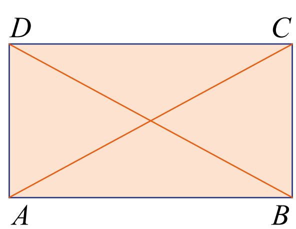
Ne kapkodj!

Néha a megoldás ellenőrzését mellőzzük, mert az nem kötelező.
Mégis, az ellenőrzés hasznos, mivel segít az esetleges hibák javításában.

1. feladat. Az ábrán látható téglalap alakú keretet és annak átlóit szeretné Dávid elkészíteni egy 10 m hosszú vasrúdból, felhasználva a teljes vasrudat. A téglalap hosszúsága a szélességének kétszerese.

a) Mutasd ki, hogy a téglalap hosszúsága kisebb, mint 2 méter!

b) Számológép segítségével fejezed ki a téglalap hosszúságát, két tizedesnyí pontossággal kerekítve!



Megoldás. a) A téglalap szélességét x-szel jelöljük, azaz $AD = BC = x$ és $AB = DC = 2x$.

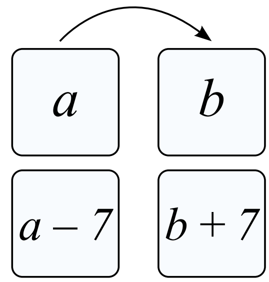
Pitagorasz tétele alapján kapjuk, hogy $AC = BD = x\sqrt{5}$.

Tehát: $AB + BC + CD + AD + AC + BD = 10 \Rightarrow 6x + 2x\sqrt{5} = 10 \;\Big|: 2 \Rightarrow 3x + x\sqrt{5} = 5$, vagyis $x = \dfrac{5}{3+\sqrt{5}}$.

Mivel $\sqrt{5} > 2$, következik, hogy $3+\sqrt{5} > 5$, tehát $x = \dfrac{5}{3+\sqrt{5}} < \dfrac{5}{5} = 1$ és $2x < 2$. A téglalap hosszúsága $AB = 2x$, vagyis kisebb, mint 2 méter.

b) Számológép segítségével azt kapjuk, hogy a téglalap hosszúsága $AB = 2x \approx 1{,}91$.

2. feladat. Andrásnak és Bélának együtt 100 leje van. Ha András 7 lejt ad Bélának, akkor Andrásnak háromszor több pénze lesz, mint Bélának. Határozzuk meg mekkora pénzösszeggel rendelkeztek eredetileg külön-külön!

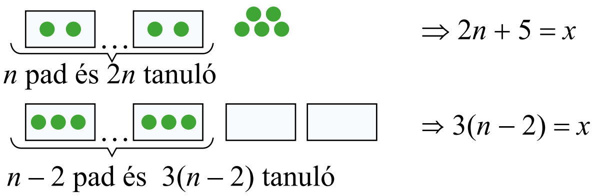


Megoldás. András kezdeti pénzét jelöljük a-val, Béla pénzét pedig b-vel. Akkor $a + b = 100$. Miután András 7 lejt ad Bélának a pénzösszegük a – 7, illetve $b + 7$ lesz. Mivel az András pénzösszege Béla pénzösszegének háromszorosa lesz: $a - 7 = 3(b + 7)$.

Így az $\begin{cases} a + b = 100 \\ a - 7 = 3(b+7) \end{cases}$ lineáris egyenletrendszert kapjuk.

Az egyenletrendszer megoldása: $a = 82$ és $b = 18$, azaz Andrásnak 82 leje, Bélának 18 leje volt.

3. feladat. Ha egy osztály tanulóit kettesével ültetjük a padokba, akkor öt tanuló állva marad. Ha hármasával ültetjük, akkor két pad üresen marad. Határozd meg az osztályban levő tanulók számát!



Megoldás. A tanulók számát x-szel, a padok számát n-nel jelöljük.

A $\begin{cases} 2n + 5 = x \\ 3(n-2) = x \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk.

$\Rightarrow 2n + 5 = 3(n - 2) \Rightarrow n = 11$ és $x = 27$

4. feladat. Egy medencét két állandó hozamú csappal 5 óra alatt tölthetünk meg. Ha csak az első csapon folyik a víz 7 órát, és utána megnyitjuk a második csapot is, akkor még három óra kell, hogy a két csap együtt megtöltse a medencét. Határozd meg, hogy mennyi idő alatt töltené meg a medencét a két csap külön-külön!

Megoldás. Jelöljük t_1-gyel (órában kifejezve) azt az időt, mialatt az első csap megtöltené a medencét, illetve t_2-vel a második csapnak szükséges időt. Legyen C a medence űrtartalma. Az a vízmennyiség, mely az egyes csapokon folyik ki egy óra alatt egyenlő $\dfrac{C}{t_1}$-gyel, valamint $\dfrac{C}{t_2}$-vel.

Az alábbi egyenletrendszert kapjuk: $\begin{cases} 5\cdot\dfrac{C}{t_1} + 5\cdot\dfrac{C}{t_2} = C \;|: C \\ 7\cdot\dfrac{C}{t_1} + 3\cdot\dfrac{C}{t_1} + 3\cdot\dfrac{C}{t_2} = C \;|: C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{t_1} + \dfrac{5}{t_2} = 1 \\ \dfrac{10}{t_1} + \dfrac{3}{t_2} = 1 \end{cases}$

Jelölések: $\dfrac{1}{t_1} = x$ és $\dfrac{1}{t_2} = y$. Az $\begin{cases} 5x + 5y = 1 \\ 10x + 3y = 1 \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $x = \dfrac{2}{35}$ és $y = \dfrac{1}{7}$.

Visszahelyettesítve: $t_1 = 17{,}5$ és $t_2 = 7$. Eredményként megállapíthatjuk, hogy az első csap 17,5 óra alatt, míg a második már 7 óra alatt töltené meg a medencét.

Megjegyzés. Néhány feladat megoldása olyan egyenletrendszerekhez vezet, melyek nem hasonlítanak az általunk tanult egyenletrendszerekhez. Ezek szükségessé teszik, hogy jelölésekkel és átalakításokkal lineáris egyenletrendszerekké változtassuk őket.

5. feladat. Az év végi záróünnepségen 18 csokor virágot adtak át a hetedikes diákoknak, ezek mindegyikében 5 szál fehér vagy 7 szál sárga rózsa volt, összesen 116 szál. Határozd meg a fehér és sárga csokrok számát!

Megoldás. Legyen x a fehér csokrok, y a sárga csokrok száma. Azt kapjuk, hogy $\begin{cases} x+y=18 \\ 5x+7y=116 \end{cases}$.

Megoldva a rendszert, az eredmény $x = 5$ és $y = 13$, azaz 5 fehér csokor és 13 sárga csokor virágot adtak át. Egyenletekkel vagy lineáris egyenletrendszerekkel megoldani egy feladatot azt jelenti, hogy követjük az alábbiakban vázlatolt megoldási folyamatot.

Jegyezd meg!

1 lépés: A feladat átnézése és megértése

Jelöljük az ismeretleneket.

Figyelmesen elolvassuk a felhívó szöveget. Felismerjük a feladat adatait és a kérdést. Megkeressük az ismeretlen mennyiségeket.

2 lépés: Matematikai nyelvre való átírás

Az egyenletek leírása.
Az egyenletrendszer leírása.

Egyértelműen kifejezzük az adatok közötti kapcsolatokat rajzok, vázlatok, ábrák segítségével. Átírjuk matematikai nyelvre az ismeretlenek közötti relációkat.

3 lépés: A megoldás kidolgozása

Az egyenlet megoldása.
Az egyenletrendszer megoldása.

Megoldjuk az egyenletrendszert, használva a helyettesítést, kiküszöbölést vagy a kombinált módszert.
Részletesen kidolgozzuk a megoldási folyamat lépéseit, és felírjuk a megoldást vagy a megoldások halmazát.

4 lépés: Ellenőrzés és kiértékelés

A megoldás ellenőrzése és az eredmény értelmezése.

Ellenőrizzük, hogy a kapott megoldás teljesíti-e a feladat feltevését. Kiértékeljük az eredményt.

Gyakorlatok és feladatok

1. Vencel és Dávid 60 matricát vásárolt. Dávid 12 matricával vásárolt többet, mint Vencel. Határozd meg kétféleképpen a két gyerek által külön-külön vásárolt matricák számát:

a) egy $a \cdot x + b = 0$ alakú egyenlettel ekvivalens egyenlettel;

b) két kétismeretlenes lineáris egyenletből álló rendszerrel.

2. Két termék árának összege 400 lej. Ha az első termék árát 15 lejjel növelnék, a második termék árát pedig 5%-kal csökkentenék, akkor a két termék árának összege nem változna. Határozd meg mindegyik termék árát!

3. Ha az a valós számot 10-zel csökkentjük, majd az eredményt megduplázzuk, akkor ugyanazt az eredményt kapjuk, mint mikor a számot 3-mal osztjuk. Határozd meg az a számot!

4. Egy munkás heti normája x darab alkatrész. Ha a munkás még 40 alkatrészt készítene, akkor heti normájának háromszorosát teljesítené. Határozd meg az x számot!

5. Egy pohár súlya 100 g, egy bögréé 270 g. Miképpen osszunk el a két edényben 300 ml vizet úgy, hogy ezáltal a súlyuk egyenlő legyen! (Feltételezzük, hogy 1 liter víz súlya 1 kg).

6. Sándor az A településen, barátja pedig a B településen lakik. Az A és B települések közötti távolság 12 km. Sándor és Dani egyszerre indult el a két településről, egymással szembe. Amikor a két barát találkozott, Sándor 800 méterrel több utat tett meg, mint Dani. Határozd meg, hogy külön-külön mekkora utat tettek meg a találkozásukig!

7. A táblázat két szomszédos cellájában levő számok összegét a fölöttük levő cellába írjuk.

	100	
$13-x$	$26+2x$	$39-x$

a) Töltsd ki a táblázatot, majd alkoss megfelelő egyenletet az x meghatározására.

b) Oldd meg az egyenletet, és írd be a kapott számokat a táblázatba!

8. Két természetes szám különbsége 53. Elosztva egymással a kapott hányados 3 és a maradék 1. Határozd meg a két számot.

9. A táborba 400 tanuló érkezett, közülük 60% fiú. 7 nap után néhány fiú elment, az ottmaradt fiúk száma a lányok száma 60%-ának kétszerese. Határozd meg a táborból elment fiúk számát!

10. Csilla a kémialaborban 24%-os sóoldatot szeretne készíteni két, 20%-os illetve 30%-os töménységű oldatból. Határozd meg az elkészítéshez szükséges oldatok mennyiségét (literben kifejezve)!

11. Szerkessz feladatot, mely megoldható:

a) az $\dfrac{x+5}{x}=\dfrac{4}{3}$ egyenlettel;

b) az $\begin{cases} x+3y=13 \\ 4x-y=11 \end{cases}$ egyenletrendszerrel.

Ismeretfelmérő

Hivatalból: 10 pont

I. *Írd ki mindegyik feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

10p	**1.** Öt egymásutáni páratlan egész szám összege 2025. A számok közül a legnagyobb: A. 407 B. 409 C. 411 D. 413
10p	**2.** Egy termék árát 20 lejjel, majd újabb 20%-kal csökkentették. Azért, hogy az ára ismét az eredeti legyen 30%-kal kellene növeljék/drágítsák. A termék eredeti ára: A. 520 lej B. 525 lej C. 530 lej D. 540 lej
10p	**3.** Egy adott távolságot Dani három különböző közszállítási járművel tett meg: $\frac{5}{6}$ részt vonattal, $\frac{1}{9}$ részt komppal és a maradék 14 km-t taxival. A vonattal megtett út hossza: A. 220 km B. 210 km C. 230 km D. 216 km
10p	**4.** Egy előadásra 124 jegyet adtak el, két kategóriában: 12 lejes és 20 lejes jegyeket. Így 1832 lej volt a bevétel. A 20 lejes jegyek száma: A. 41 B. 42 C. 43 D. 44

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

10p	**1.** Egy közönséges tört számlálója 4-gyel kisebb, mint a nevezője. Duplázva a számlálót és 1-gyel növelve a nevezőt egyenértékű törtet kapunk. Határozd meg az eredeti törtet!
20p	**2.** Anna és Mária együtt rendelkezik egy bizonyos összeggel. Ha Anna pénzének hatodát adná Máriának, akkor Máriának fele annyi pénze lenne, mint amennyi marad Annának. Ha Mária pénzének tizedét adná Annának, akkor Annának 96 lejjel lenne több, mint amennyi pénze marad Máriának. Mennyi pénzzel rendelkezik együtt a két lány?
20p	**3.** Két racionális szám inverzének összege $\frac{5}{6}$, valamint inverzeik különbsége $\frac{1}{6}$. Számítsd ki a két szám összegét és szorzatát!

3 Az adatszervezés elemei

3.1. Két halmaz Descartes-féle szorzata. Derékszögű koordinátarendszer
3.2. Függvényi kapcsolat

Sajátos kompetenciák:

1.3. **2.3.** **3.3.** **4.3.** **5.3.** **6.3.**

3.1. Két halmaz Descartes-féle szorzata. Derékszögű koordináta-rendszer

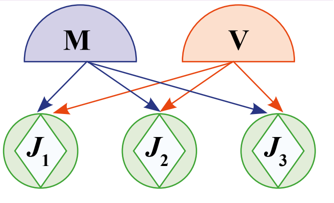
1.l. Két halmaz Descartes-féle szorzata

Emlékeztető

Ha (a, b) rendezett elempárok és $a \neq b$ akkor $(a, b) \neq (b, a)$.
Az (a, b) és (c, d) rendezett elempárok akkor és csakis akkor egyenlőek, ha $a = c$ és $b = d$.

Oldjuk meg figyelmesen!

1. feladat. A vakációban Mátyás és Vilmos reggelente kiment a közelben található három játszótér valamelyikére. Minden nap egymástól függetlenül döntötték el, hogy melyiket választják. Otthonról a játszótérig eltérő útvonalak vezetnek.
a) Hány útvonalat használhat összesen a két gyerek?
b) Mekkora valószínűséggel találkoznak a gyerekek egy reggel ugyanazon a játszótéren?



Megoldás. a) Készítsünk vázlatot! Jelöljük M-mel Mátyás, V-vel Vilmos lakását, J_1-gyel, J_2-vel és J_3-mal a három játszóteret, nyilakkal pedig az útvonalakat. Minden útvonal meghatároz egy rendezett elempárt: az első komponens a gyermek lakhelyét jelöli, a második pedig a játszótereket.
$A = \{V, M\}$ a gyerekek halmaza, $B = \{J_1, J_2, J_3\}$ a játszóterek halmaza.
Az A és B halmazok elemeiből képezhető rendezett elempárok halmaza:
$\{(M, J_1), (M, J_2), (M, J_3), (V, J_1), (V, J_2), (V, J_3)\}$.
Ezt a halmazt így jelöljük: $A \times B$. Neve: A és B Descartes-féle szorzata. Tehát az útvonalak száma 6.
b) Lehetséges esetek:
$(L_1, L_1), (L_1, L_2), (L_1, L_3), (L_2, L_1), (L_2, L_2), (L_2, L_3), (L_3, L_1), (L_3, L_2), (L_3, L_3)$, számuk 9.
Kedvező esetek: $(L_1, L_1), (L_2, L_2), (L_3, L_3)$, ezek száma 3.
A keresett valószínűség: $p = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} = 0,(3)$.

2. feladat. Sára családja új lakásba költözött. Szobájának négy falát Sára két színnel szeretné kifesteni: sárgával és lilával.
Sára tervet készít: kiszámítja, hány rendezett elempár van, amelyben az első komponens a szoba egyik fala, a második komponens pedig a fal színe.

Megoldás. Minden falhoz két szín rendelhető, tehát minden fal meghatároz két rendezett elempárt.
1) Jelöljük f_1, f_2, f_3, f_4-gyel a falakat, s-sel és l-lel a színeket (fehér illetve lila). Elkészítjük az alábbi táblázatot:

fal	f_1		f_2		f_3		f_4	
szín	s	l	s	l	s	l	s	1

2) A táblázatból kiolvashatjuk a következő rendezett párokat: (f_1, s), (f_1, l), (f_2, s), (f_2, l), (f_3, s), (f_3, l), (f_4, s), (f_4, l). Tekintsük a következő halmazokat: $A = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ és $B = \{s, l\}$. Ezek segítségével megkaphatjuk a rendezett elempárok halmazát: $\{(f_1, s), (f_1, l), (f_2, s), (f_2, l), (f_3, s), (f_3, l), (f_4, s), (f_4, l)\}$, amit így jelölünk $A \times B$.
Megállapítjuk, hogy a feladat követelményei szerint összesen 8 rendezett elempár alkotható.

Megjegyzés. A rendezett elempárok halmaza nem azt fejezi ki, hogy hányféleképpen festhető ki a szoba! Mind a négy fal, egymástól függetlenül, kétféleképpen színezhető: sárgára vagy lilára. A szorzási szabály alapján ez $2^4 = 16$ különböző lehetőséget jelent.

Fedezzük fel, értsük meg!

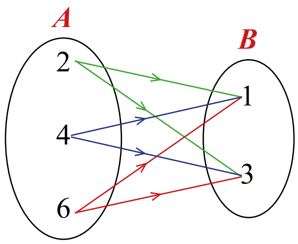
Értelmezés. Az A és B nem üres halmazok Descartes-féle szorzata egyenlő az összes (a, b) rendezett elempár halmazával, ahol $a \in A$ és $b \in B$. Jelölése: $A \times B$

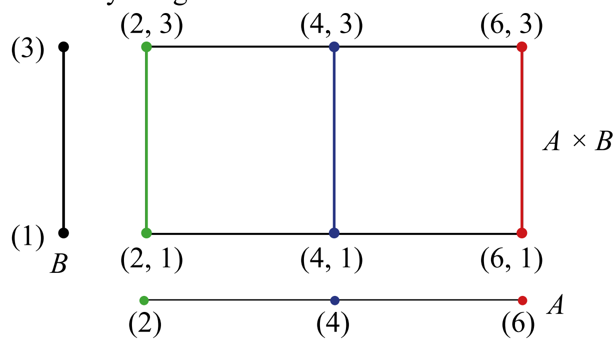
Megjegyzés. a Descartes-féle szorzatot szokás rövidebben Descartes-szorzatnak is nevezni.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Két halmaz Descartes-féle szorzata diagram segítségével is ábrázolható (többféleképpen is), oly módon, hogy az ábrából ki lehessen olvasni a rendezett elempárokat és azok komponenseinek sorrendjét is.

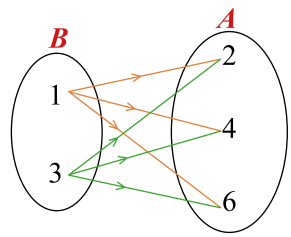
Példa. Ha $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$ akkor $A \times B = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\}$. Alább látható az $A \times B$ Descartes-szorzatot ábrázoló két diagram. A bal oldali ábrát nyíldiagramnak nevezzük.





Az $A \times B$ Descartes-szorzat elemeinek száma $3 \cdot 2 = 6$.

Ha A és B különböző halmazok, akkor $A \times B \neq B \times A$.



Példa. A fent szereplő $A = \{2, 4, 6\}$ és $B = \{1, 3\}$ halmazok esetén:

$A \times B = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\}$,

$B \times A = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}$.

$A \times B \neq B \times A$, ami a nyíldiagramok összehasonlításából is kitűnik.

Ha $A = B$, akkor az $A \times A$ descartes-szorzatot szokás így is jelölni: A^2. Például $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Vizsgáljuk általános esetben is a Descartes-szorzatban szereplő elempárok számát! Legyen A és B két nem üres halmaz, card $A = a$ és card $B = b$. A fenti példák alapján megállapítjuk, hogy az A halmaz minden egyes eleme (a elem) összekapcsolható a B halmaz összes elemével (b elem), így összesen $a \cdot b$ rendezett elempár képezhető. Érvényes tehát a következő tétel:

Tétel

Ha A és B két nem üres halmaz és card $A = a$, card $B = b$, akkor card $A \times B = a \cdot b$.

$$\mathrm{card}(A \times B) = (\mathrm{card}\, A) \cdot (\mathrm{card}\, B)$$

Jegyezd meg!

- Ha A és B két nem üres halmaz, akkor értelmezhető ezek Descartes-féle szorzata: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.
- A Descartes-szorzat grafikusan is ábrázolható, diagramok segítségével.
- Ha $A \neq B$, akkor $A \times B \neq B \times A$.
- card $(A \times B) =$ (card A) $\cdot$ (card B)
- card $(A \times B) =$ card $(B \times A)$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Egészítsétek ki az üresen hagyott helyeket úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjatok!
a) $A \times B = \{(a, b) \mid a \in \dots, b \in \dots\}$;
b) Ha card $A = n$ és card $A = m$, akkor
card $A \times B = \dots$.
c) $A \times B \dots B \times A$.

2. Ha $A = \{-2; -1; 3\}$ és $B = \{0; 2\}$, határozzátok meg az $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$ halmazokat!

3. Ha $C = \{-3;1\}$ és $D = \left\{x \in \mathbb{Z}^* \,\middle|\, |x| \le 2\right\}$, számítsátok ki a $C \times D$ és $D \times C$ Descartes-féle szorzatokat!

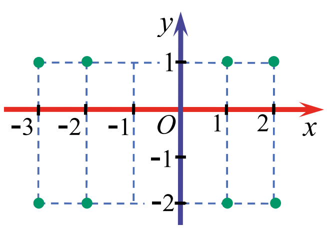
4. Ha $A \times B = \{(-4, 0), (-4, 2), (-4, 4), (-4, 6), (-2, 0), (-2, 2), (-2, 4), (-2, 6)\}$, határozzátok meg az A és B halmazokat!

5. Találj ki négy változatot olyan A és B halmazokra, amelyek esetén az $A \times B$ Descartes-szorzatnak 6 eleme legyen!
A különböző változatokban az A halmaz elemeinek száma különböző legyen!

6. Határozzátok meg a következő halmazt:
$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, x + x \cdot y = -4\right\}.$$

7. Határozzátok mega az A és B halmazt, ha $A \times B = \{(-2, a), (-1, a), (-2, b), (-1, b), (-2, c), (-1, c)\}$ és a, b, c a három legkisebb különböző pozitív egész szám, amelyekre igaz, hogy $|c - a - b| = 0$.

8. Ábrázoltuk a derékszögű koordináta-rendszerben az $A \times B$ Descartes-szorzatot. Soroljátok fel az A és B halmaz elemeit!

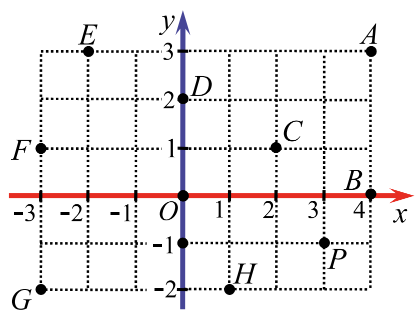


9. Ábrázoljátok a derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi halmazok elemeit!
$$M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, |x| = 3,\ -3 < y < 1\right\};$$
$$M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, |x| \le 1,\ y^2 = 4\right\};$$
$$M_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,\middle|\, (3x)^2 + y^2 = 10\right\}.$$

10. Adottak az A és B halmazok:
$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{3}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ és}$$
$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{-4}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Ábrázoljátok a derékszögű koordináta-rendszerben a $B \times A$ Descartes-szorzat elemeit!

11. A Gólyabál szervező bizottsága két műsorvezetőt szeretne kiválasztani: egy lányt és egy fiút. A válogatóra jelentkezett 5 lány: Dalma, Enikő, Flóra, Gabriella, Hanna és 3 fiú: András, Béla, Csaba.
a) Jelöljétek L-lel a lányok, F-fel a fiúk halmazát és határozzátok meg a halmazok elemeit!
b) Írjátok le az $L \times F$, majd az $F \times L$ halmazt!
c) Hányféleképpen választható ki a műsorvezető pár? Indokoljátok meg a választ!

12. Az alábbi ábrán azonosítsátok a jelzett pontok koordinátáit. Másoljátok le az ábrát a füzetetekbe és töltsétek ki az üres helyeket az $A(4, 3)$ minta alapján!



$A(4, 3)$
$B(\dots, \dots)$
$C(\dots, \dots)$
$D(\dots, \dots)$
$E(\dots, \dots)$
$F(\dots, \dots)$
$G(\dots, \dots)$
$H(\dots, \dots)$
$P(\dots, \dots)$

2.ℓ. A derékszögű koordináta-rendszer

Emlékeztető

Számtengelynek nevezünk egy olyan egyenest, amelyen kijelöltük a **kezdőpontot**, a **mértékegységet** és a **pozitív haladási irányt**. A számtengelyen elhelyezkedő A és B pont közti távolság: $AB = |x_B - x_A|$.

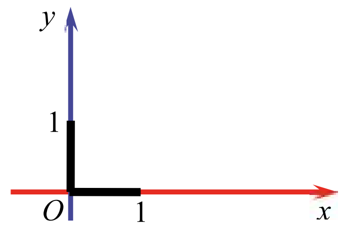
Egy kis történelem

René Descartes (1596–1650), latinosított nevén **Cartesius** francia filozófus, természetkutató és matematikus. Számos tudományos fogalom kapcsolódik a nevéhez. A matematikában ő a ***koordináta-geometria***, más néven ***analitikus geometria*** megteremtője, amelynek keretében lehetséges a mértani tulajdonságokat algebrai számítások alapján tanulmányozni.
Ennek érdekében bevezette a derékszögű koordináta-rendszert, amit róla Descartes-féle koordináta-rendszernek is nevezünk.

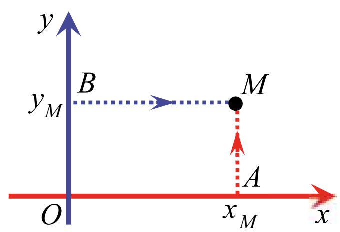
Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés.
Két, közös kezdőpontú, egymásra merőleges számtengely **derékszögű koordináta-rendszert** vagy **Descartes-féle koordináta-rendszert** képez.

- A két tengely közös **kezdőpontját** a koordináta-rendszer kezdőpontjának vagy **origójának** nevezzük, és O-val jelöljük.
- A vízszintes tengelyt Ox-szel jelöljük, és **abszcissza-tengelynek** nevezzük. A pozitív irány balról jobbra tart.
- A függőleges tengelyt Oy-nal jelöljük, és ordináta-tengelynek nevezzük. A pozitív irány lentről felfele tart.
- A koordináta-rendszer jelölése: xOy, ritkábban (Ox, Oy).

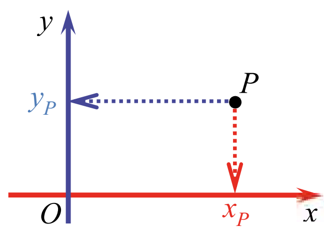


Tekintsük a síkban az xOy derékszögű koordináta-rendszert.
Minden $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ valós számpárnak megfelel egyetlen jól meghatározott pont a síkban a következő eljárás szerint:
– az Ox tengelyen felvesszük az A pontot, melynek koordinátája a;
– az Oy tengelyen felvesszük a B pontot, melynek koordinátája b;
– téglalapot szerkesztünk, melynek három csúcsa O, A és B;
– a téglalap negyedik csúcsa M, ez lesz a keresett pont.



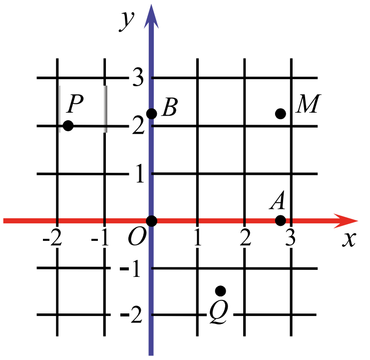
Az M pontot az (a, b) rendezett számpár **mértani ábrázolásának** nevezzük.
Az a és b számokat az M pont koordinátáinak nevezzük. Szokás ezeket x_M illetve y_M-mel is jelölni.
Az M pontot tehát így jelöljük: $M(x_M, y_M)$ és így olvassuk: az M pont koordinátái x_M és y_M.
Az $x_M = a$ koordinátát M **abszcisszájának**, az $y_M = b$ koordinátát M **ordinátájának** nevezzük.

Fordítva, az alábbi eljárással a sík minden P pontjához egyértelműen hozzárendelhető egy valós számpár, amit (x_P, y_P)-vel jelölünk. A P pontból egy-egy merőlegeset húzunk a két koordináta-tengelyre, ezek az Ox tengelyt az x_P, az Oy tengelyt pedig az y_P koordinátájú pontban metszik. Az így meghatározott x_P és y_P számok lesznek a P pont **koordinátái**.

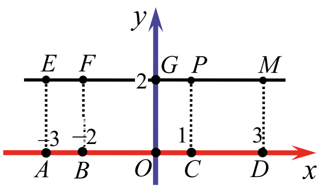


Következtetés. A sík pontjainak halmaza és az (x, y) rendezett számpárok halmaza között létezik egy *kölcsönösen egyértelmű* megfeleltetés.
A két tengelyen *ugyanazt* a mértékegységet használjuk.

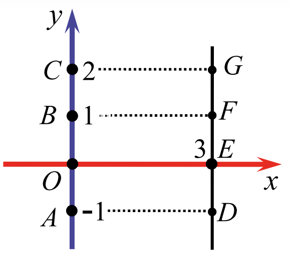
Alkalmazás



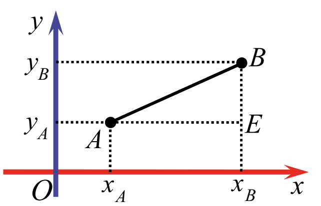
A mellékelt ábrán a következő pontokat tűntettük fel:
$O(0{,}0)$; $A\left(\sqrt{8},0\right)$; $B\left(0,\sqrt{5}\right)$; $M\left(\sqrt{8},\sqrt{5}\right)$; $P\left(-\sqrt{3},2\right)$ és $Q\left(1{,}5;-\sqrt{2}\right)$.
Megjegyzések.
- Egy pont akkor és csakis akkor található az Ox tengelyen, ha ordinátája 0.
  $M \in Ox \Leftrightarrow y_M = 0$. A mellékelt ábrán $A \in Ox$.
- Egy pont akkor és csakis akkor található az Oy tengelyen, ha abszcisszája 0.
  $M \in Oy \Leftrightarrow x_M = 0$. A mellékelt ábrán $B \in Oy$.
- A derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja (origója): $O(0, 0)$.



A mellékelt ábrán A, B, C, D és O pont az Ox tengelyen helyezkedik el: $A(-3, 0)$, $B(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $C(1, 0)$ és $D(3, 0)$. Az E, F, G, P és M pont egy vízszintes egyenesen található, amely az Oy tengelyt a 2 ordinátájú pontban metszi. Ugyanazon a vízszintes egyenesen található pontok ordinátái egyenlőek. Esetünkben: $E(-3, 2)$, $F(-2, 2)$, $G(0, 2)$, $P(1, 2)$, $M(3, 2)$, tehát $y_E = y_F = y_G = y_P = y_M$.
Ha A és B ugyanazon a vízszintes egyenesen helyezkedik el, akkor az egymástól mért távolságuk: $AB = |x_B - x_A|$.



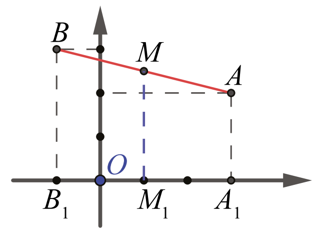
A mellékelt ábrán, $A, O, B, C \in Oy$: $A(0, -1)$, $O(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(0, 2)$.
Ugyanazon a függőleges egyenesen található pontok abszcisszái egyenlőek.
D, E, F és G négy pont egy függőleges egyenesen, amely az Ox tengelyt a 3 abszcisszájú pontban metszi: $D(3, -1)$, $E(3, 0)$, $F(3, 1)$ és $G(3, 2)$.
Ha A és B ugyanazon a függőleges egyenesen elhelyezkedő pontok, akkor az egymástól mért távolságuk: $AB = |y_B - y_A|$.



Két pont távolsága a síkban: Ha $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, két pont a síkban, akkor a távolságuk az alábbi képlettel számítható ki:

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}.$$

Bizonyítás. Felvesszük az $E(x_B, y_A)$ pontot. A fentebb tárgyalt esetek alapján:
$AE = |x_B - x_A|$ és $BE = |y_B - y_A|$.
Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az ABE háromszögben: $AB^2 = AE^2 + BE^2$.
Figyelembe véve, hogy $|x_B - x_A|^2 = \left(x_B - x_A\right)^2$, a bizonyítandó képletet kapjuk.



Feladat. Adott két pont a derékszögű koordináta-rendszerben: $A(3, 2)$ és $B(-1, 3)$.
a) Számítsátok ki a két pont távolságát!
b) Határozzátok meg az A_1, B_1 és M_1 pont koordinátáit! A fenti ismeretek alapján azonosítsátok az AB szakasz M felezőpontjának abszcisszáját!

Megoldás.

a) $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\left(-1-3\right)^2 + \left(3-2\right)^2} = \sqrt{17}.$

b) Könnyen észrevehető, hogy M_1 az A_1B_1 szakasz felezőpontja.

MM_1 középvonal az A_1B_1BA trapézban, tehát $MM_1 \parallel Oy$, következésképpen M és M_1 abszcisszái azonosak: $x = 1$.

Feladat a portfólióba

1) Tekintsük az $M(x_M, y_M)$ és $P(x_P, y_P)$ pontot. Válasszatok mindkét ponthoz 4-4 értékpárt, és ábrázoljátok az így kapott pontokat különböző koordináta-rendszerekben!
2) Mind a négy esetben határozzátok meg az MP szakasz felezőpontjának koordinátáit! Hasonlítsátok össze a kapott eredményeket az $\frac{x_M + x_P}{2}$, illetve $\frac{y_M + y_P}{2}$ képlet alapján kiszámított értékekkel!

Gyakorlatok és feladatok

1. Adott az $A(a, b)$ pont. Másoljátok a füzetbe az alábbi mondatokat, majd egészítsétek ki a következő kifejezések egyikével úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjatok: *koordinátái, abszcisszája, ordinátája*.
a) a az A pont… ;
b) b az A pont … ;
c) a és b az A pont … .

2. Másoljátok a füzetbe, majd egészítsétek ki helyesen! Az $A(x_1,y_1)$ és $B(x_2,y_2)$ pontok közti távolság: $\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

3. Ábrázoljátok a derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat: $A(1, 3)$, $B(2, 0)$, $C(-2, 4)$, $D(-3, 0)$, $E(-4, 2)$, $F(0, -3)$, $G(-2, -2)$.

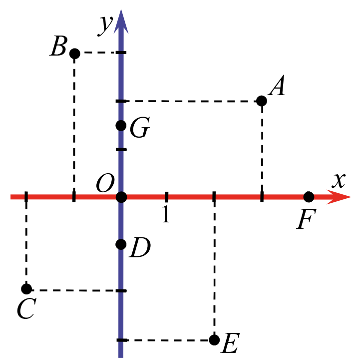
4. Adott az $A(3, 0)$, $B(-5, 0)$, $C(0, -2)$, $D(0, 4)$ pont.
a) Ábrázoljátok az xOy derékszögű koordináta-rendszerben az A, B, C és D pontot!
b) Ábrázoljátok ugyanabban a koordináta-rendszerben az A, B, C és D pont A', B', C' illetve D' szimmetrikusát az O pontra nézve!

5. Adott az $E(2, 3)$, $F(-3, 2)$ és $G(3, -1)$ pont.
a) Ábrázoljátok az xOy derékszögű koordináta-rendszerben az E, F és G pontot, valamint ezek P, Q illetve R szimmetrikusait az Ox tengelyre nézve!
b) Határozzátok meg a P, Q és R pontok koordinátáit!

6. Ábrázoljátok a derékszögű koordináta-rendszerben:
a) a $P(4, 3)$ pontot és számítsátok ki az OP távolságot;
b) az $A(-3, 0)$ és $B(2,0)$ pontot és számítsátok ki az AB távolságot;
c) a $C(0, 6)$ és $D(\sqrt{13}, 0)$ pontot és számítsátok ki a CD távolságot!

7. Tekintsük az xOy derékszögű koordináta-rendszert.
a) Az $A(-3, a)$, $B(1, b-1)$, $C(4, 2c-6)$ pont az Ox tengelyen helyezkedik el. Mennyivel egyenlő $a + b + c$?
b) Tudjuk, hogy a $Q(q-\sqrt{2}, -2)$, $R(r-\sqrt{8} : 4, -1)$, $S(s+\sqrt{18}, 1)$ pontok az Oy tengelyen helyezkednek el. Mennyivel egyenlő $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$?

8. Határozzátok meg az alábbi koordináta-rendszerben ábrázolt pontok koordinátáit!



9. Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben adott $A(3,2)$, $B(-1,2)$ és $C(-1, -2)$ pontot és legyen D az A szimmetrikusa az abszcissza-tengelyre nézve.
a) Határozzátok meg a D pont koordinátáit!
b) Számítsátok ki az AB, BC, CO és AC szakasz hosszát!
c) Igazoljátok, hogy $ABCD$ négyzet!

10. a) Ábrázoljátok a derékszögű koordináta-rendszerben az $M(2,5)$ és $N(0,1)$ pontot.
b) Számítsátok ki az MN szakasz hosszát!
c) Adott a $P(4, y)$ pont. Határozzátok meg y értékét, ha az MNP háromszög egyenlő szárú, és az alapja NP!

3.2. Függvényi kapcsolat

Oldjuk meg figyelmesen!

Az alábbi táblázat egy meteorológiai állomás észlelési jegyzettömbjében szerepel:

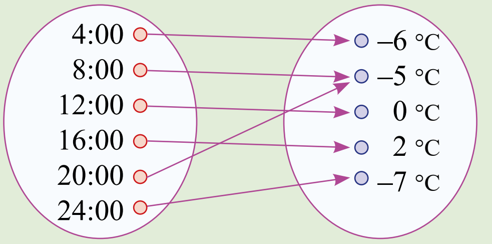
Időpont	4:00	8:00	12:00	16:00	20:00	24:00
Hőmérséklet	– 6 °C	– 5 °C	0 °C	2 °C	– 5 °C	– 7 °C

a) A táblázat jelentése: 4:00 órakor a levegő hőmérséklete –6° volt, 8:00 órakor a levegő hőmérséklete –5° volt és így tovább. Megállapíthatjuk tehát, hogy *a levegő hőmérséklete függ a mérés időpontjától*.

b) Meghatározzuk a mérés időpontja és a mért hőmérséklet közti összefüggést:
4:00 → –6 °C; 8:00 → –5 °C; 12:00 → 0 °C; 16:00 → 2 °C; 20:00 → –5 °C; 24:00 → –7 °C.

c) Ha A-val jelöljük a mérési időpontok halmazát és B-vel a mért hőmérsékletek halmazát, a függőségi kapcsolatot a mellékelt diagram segítségével ábrázolhatjuk.

d) A megfeleltetést jelző nyilakat követve, megfigyelhető, hogy az A halmaz minden eleméhez hozzárendelhető a B halmaz egy-egy jól meghatározott eleme.



Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés. Ha A és B két nem üres halmaz, azt mondjuk, hogy függvényi kapcsolat van közöttük, ha valamely szabály alapján, az A halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a B halmaz egy-egy jól meghatározott elemét.

A függvényi kapcsolat megadható táblázat, kördiagram, botdiagram, oszlopdiagram, vonaldiagram, grafikon, gyakorisági poligon, Venn-Euler diagram, stb. segítségével.

1. feladat. A mellékelt táblázat az x és y mennyiségek között létező függvényi kapcsolat értékeit tartalmazza. Határozzátok meg a értékét.

x	0	3	9
$y = x - 3$	-3	0	a

Megoldás: $a = 9 - 3 = 6$.

2. feladat. Egy osztály 25 tanulója felmérő dolgozatot írt. Az eredmények ismeretében függvényi kapcsolat létesíthető az osztály tanulóinak halmaza és a kapott osztályzatok halmaza között: 1. tanuló → 6-os osztályzat, 2. tanuló → 7-es osztályzat, 3. tanuló → 6-es osztályzat, …, 25. tanuló → 7-es osztályzat. Többen is kaphattak ugyanolyan osztályzatot. Egy osztályzat előfordulásainak számát az adott osztályzat ***abszolút gyakoriságának*** nevezzük.

Az eredményeket a mellékelt **adattáblázat** foglalja össze, amely megmutatja az egyes osztályzatok és azok abszolút gyakorisága között fennálló függvényi kapcsolatot. A táblázat vizsgálata igen hasznos lehet, ha az osztály tanulóinak előmenetelét tanulmányozzuk.

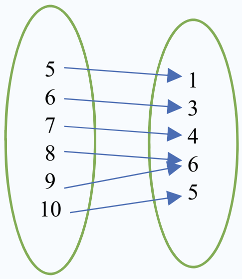
osztályzat	5	6	7	8	9	10
gyakoriság	1	3	4	6	6	5

A diagramok, grafikus képek, táblázatok tömören fejezik ki az osztály tudásszintjét. Összehasonlítva korábbi felmérők eredményeivel, nyomon követhető a színvonal időbeni alakulása.

Az A halmazból a B halmazba történő függvényi kapcsolat grafikonja mindazon (x, y) rendezett elempárok halmaza, amelyekben $x \in A$, $y \in B$, és a függvény x-nek megfelelteti y-t.

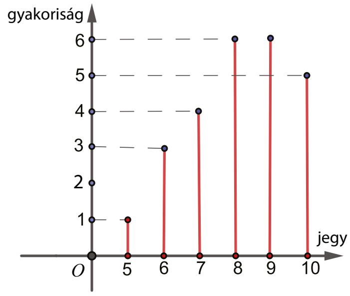
A 2. feladat adatait többféleképpen ábrázoljuk:

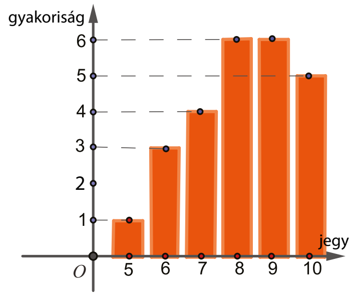
Venn-Euler diagram



a) Ábrázoljuk a halmazokat, amelyek között függvényi kapcsolat létezik.
b) Nyilakkal összekötjük az első halmaz minden elemét a második halmaz neki megfelelő elemével.

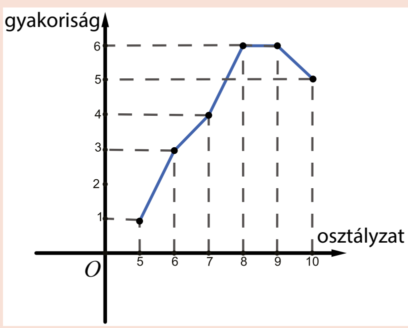
Botdiagram, oszlopdiagram





a) Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a függvényi kapcsolat grafikonja által meghatározott pontokat.
b) Az így kapott pontokból függőleges szakaszokat húzunk az Ox tengelyig, amiket *botoknak* vagy *oszlopoknak* nevezzük.
A fenti ábrán bal oldalon a **botok**, jobb oldalon az **oszlopok** láthatók.

Gyakorisági poligon



a) Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a függvényi kapcsolat grafikonját.
b) Összekötjük a grafikon szomszédos pontjait, ezáltal egy törött vonalat kapunk. Ezt a vonalat **gyakorisági poligonnak** nevezzük.

Megjegyzés. A gyakorisági poligon segítségével összehasonlítható két érték (esetünkben osztályzat) *gyakorisága*. A nagyobb gyakoriságú értékről azt mondjuk, hogy nagyobb a *súlya*.
Számítás nélkül becsülhető az értékek (osztályzatok) átlaga. A vizsgált példában a 8-as és a 9-es osztályzat súlya a legnagyobb (domináns érékek), az 5-ös osztályzat súlya a legkisebb. Az átlag becsült értéke 8-as. Számítsátok ki számológép segítségével a súlyozott középértéket!

Alkalmazás

1. feladat. Határozzuk meg $2^n + 3^n$ utolsó számjegyét, ha n nullától különböző természetes szám!
Számítással ellenőrizzük, hogy 2 és 3 hatványainak utolsó számjegye 4-enként ismétlődik. Az eredményeket a fenti két táblázatba foglaltuk, ezáltal függvényi kapcsolatot teremtettünk a hatványkitevők alakja és 2, illetve 3 hatványainak utolsó számjegye között.
Végül készítettünk egy összefoglaló táblázatot, amely függvényi kapcsolatot létesít az n hatványkitevő alakja és a $2^n + 3^n$ szám utolsó számjegye között.

n alakja	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$u(2^n)$	6	2	4	8

n alakja	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$u(3^n)$	1	3	9	7

n alakja	$u(2^n)$	$u(3^n)$	$u(2^n + 3^n)$
$n = 4k$	6	1	7
$n = 4k + 1$	2	3	5
$n = 4k + 2$	4	9	3
$n = 4k + 3$	8	7	5

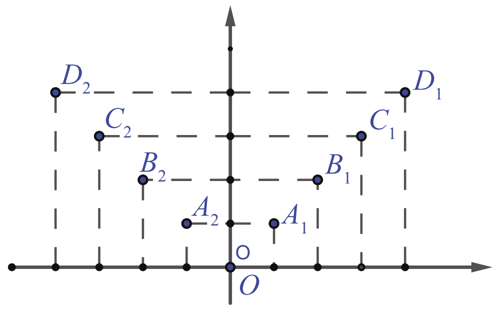
2. feladat. Adott az $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ halmaz és az $x \to y = |\,x\,|$ megfeleltetés az A halmazról a természetes számok halmazába.

a) Igazoljátok, hogy az A és $\mathbb{N}$ halmazok között függvényi kapcsolat létezik.

b) Ábrázoljátok grafikusan a függvényi kapcsolatot.

Megoldás. a) Minden egész szám abszolút értéke (modulusa) egy jól meghatározott természetes szám, tehát az $x \to y = |\,x\,|$ megfeleltetés egy függvényi kapcsolatot hoz létre.

c) A grafikont az $(x, |\,x\,|)$ koordinátájú pontok alkotják, ahol $x \in A$.



A függvényi kapcsolat grafikonját alkotó pontok: $A_1(1, 1)$, $A_2(-1, 1)$, $B_1(2, 2)$, $B_2(-2, 2)$, $C_1(3, 3)$, $C_2(-3, 3)$, $D_1(4, 4)$, $D_2(-4, 4)$.

A statisztikai adatokat számos más típusú táblázattal is össze lehet foglalni, a függvényi kapcsolatokat is különféle diagramokkal lehet ábrázolni. Ezek közül egyeseket meg fogunk ismerni további alkalmazások során.

Jegyezzük meg!

Az $x \to y$ megfeleltetés **függvényi kapcsolatot** teremt az A halmazról a B halmazra, ha az A halmaz minden eleméhez hozzárendeli a B halmaz egy-egy jól meghatározott elemét.

Egy függvényi kapcsolat **táblázat**, **grafikon**, **diagram** segítségével ábrázolható.

Gyakorlatok és feladatok

1. Egy kilogramm szőlő ára 7,5 lej. Mennyit kell fizetni 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 8 kg, illetve 10 kg szőlőért? Egészítsétek ki az alábbi táblázatot!

A szőlő mennyisége (kg)	1	2	3	4	5	8	10
Fizetendő összeg (lej)	7,5						

2. Számítsátok ki az l cm oldalhosszúságú négyzet területét, ha $l \in \{2; 3{,}5; 6; 10{,}4; \sqrt{201}\}$. Foglaljátok táblázatba a kapott eredményeket!

3. Ábrázoljátok diagram segítségével a kör sugara és kerülete közti függvényi kapcsolatot, ha a kör sugara centiméterben kifejezve $r \in \{1; 2{,}5; 0{,}75; 4{,}4\}$.

4. Egy kerékpáros 18 km/h átlagsebességgel halad. Számítsátok ki az általa megtett távolságot 2 óra, 3 óra, 4,5 óra, 300 perc alatt és foglaljátok táblázatba az eredményeket az alábbi minta szerint!

Időtartam	2 h			
Megtett távolság	36 km			

5. Egy téglalap kerülete 24 cm.

a) Fejezzétek ki a téglalap hosszúságát a szélesség függvényében!

b) Számítsátok ki a téglalap hosszúságát, ha a szélessége rendre: 2 cm, 3 cm, 4,5 cm, 5 cm. Az eredményeket foglaljátok táblázatba! Ábrázoljátok az $sz \to L$ megfeleltetés grafikonját!

6. Egy osztály tanulói ismeretellenőrző dolgozatra a következő osztályzatokat kapták: 9, 8, 4, 7, 8, 9, 7, 8, 10, 10, 5, 8, 9, 6, 9, 8, 10, 7, 7, 6, 4, 8, 9, 8, 9.

Osztályzat	4	5	6	7	8	9	10
Tanulók száma							

a) Másoljátok le a táblázatot és töltsétek ki: minden osztályzat alatt szerepeljen az előfordulás gyakorisága!

b) Számítsátok ki az osztály átlagát!

c) Ábrázoljátok grafikusan az egyes osztályzatok és előfordulási gyakoriságuk kapcsolatát!

d) Ábrázoljátok diagram segítségével az egyes osztályzatok és előfordulási gyakoriságuk kapcsolatát!

e) Melyik osztályzat súlya a legnagyobb?

7. Adott az $x \rightarrow y$ függvényi kapcsolat a $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ halmazról az $\mathbb{N}$ halmazra, amelyet a következő megfeleltetési szabály határoz meg: „y egyenlő az x^2 szám utolsó számjegyével”.

a) Határozzátok meg mindazon értékek halmazát, amelyet y felvehet!

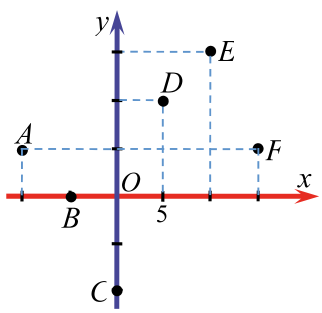
b) Foglaljátok táblázatba az eredményeket!

c) Ábrázoljátok a függvényi kapcsolatot grafikon és diagram segítségével!

8. Alább ábrázoltuk az $x \rightarrow y$ függvényi megfeleltetés grafikonját.

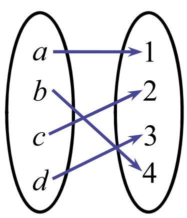
a) Határozzátok meg az A, B, C, D, E és F, pont koordinátáit, ha a D pont abszcisszája 5-tel egyenlő!

b) Készítsétek el a függvényi megfeleltetés értéktáblázatát, majd az általa meghatározott Venn-Euler diagramot!

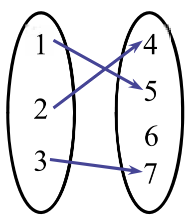


9. Az alábbi diagramok közül melyik határoz meg függvényi kapcsolatot?

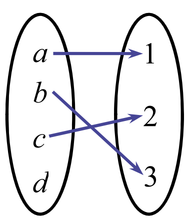
a)



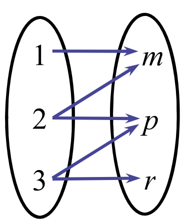
b)

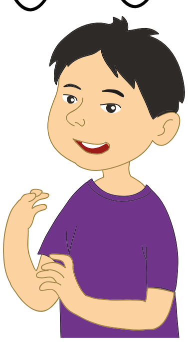


c)



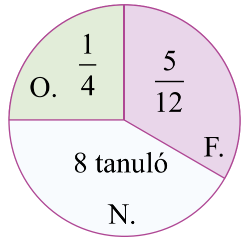
d)



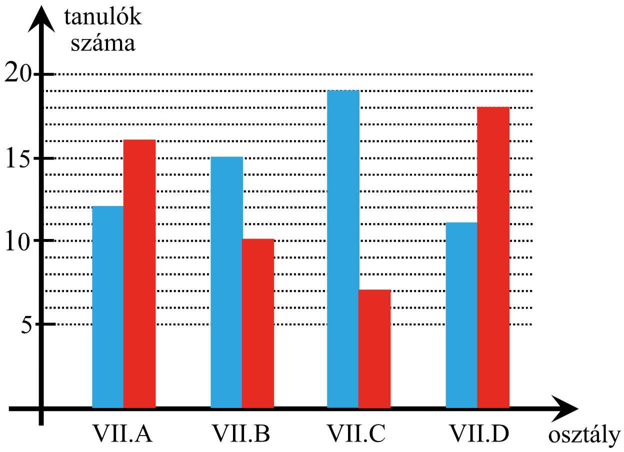


10. Az alábbi diagram egy osztály tanulóinak a második idegen nyelvre vonatkozó opciói alapján készült. Hány tanuló jár ebbe az osztályba és közülük hányan választották az olasz nyelvet?

F. – francia
N. – német
O. – olasz



11. Az alábbi diagram egy iskola VII. osztályainak létszáma alapján készült. A kék oszlopok ábrázolják a fiúk számát, a piros oszlopok pedig a lányokét.



a) Határozzátok meg az egyes osztályok létszámát!

b) Számítsátok ki az iskolába járó hetedikes fiúk számát!

c) Azonosítsátok azokat az osztályokat, amelyekben a lányok száma meghaladja a fiúk számát!

d) Határozzátok meg az iskola hetedik osztályainak átlagos létszámát!

e) Másoljátok le az alábbi táblázatot, majd töltsétek ki a diagram alapján!

Osztály	VII.A	VII.B	VII.C	VII.D
Lányok száma	16			
Fiúk száma	12			
Osztály létszáma	28			

Ismeretfelmérő

Hivatalból jár 10 pont

I. *Karikázd be a helyes válasz betűjelét! Csak egy válasz helyes.*

5p **1.** Ha $A(-3, 8)$ és $B(0, 4)$ két pont, akkor az AB szakasz hossza:
A. 6 B. 5 C. 7 D. 8

5p **2.** Ha $C\,(0, -5)$, $D\,(a, 3)$ és $CD = 10$, akkor az a szám lehetséges pozitív értéke:
A. 6 B. 7 C. 5 D. 4

5p **3.** Ha az $E\,(-3, 2)$ pont szimmetrikusa a koordináta-rendszer kezdőpontjára nézve az F pont, akkor F koordinátái:
A. $(-3, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-3, -2)$ D. $(3, -2)$

5p **4.** Adott négy pont a derékszögű koordináta-rendszerben: $A(-4, 1)$, $B(-1, 5)$, $C(2, 5)$, $D(5, 1)$. Az $ABCD$ négyszög kerülete:
A. 25 B. 26 C. 22 D. 28

5p **5.** Ha $A \times A = \{(2, 4), (4, \text{a}), (6, 4), (2, \text{b}), (4, 6), (6, \text{b})\}$, akkor az $A \times A$ Descartes-szorzat elemeinek száma:
A. 3 B. 6 C. 9 D. 27

5p **6.** Ha $A \times B = \{(2, 4), (4, a), (6, 4), (2, b), (4, 6), (6, b)\}$, akkor a B halmaz:
A. $\{4, 6\}$ B. $\{4, 2\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{2, 6\}$

5p **7.** Egy matematika versenyen négy feladatot tűztek ki. A táblázat tartalmazza az egyes feladatokat helyesen megoldó tanulók számát. Tudjuk, hogy a négy feladat valamelyikére összesen 221 helyes megoldás született.

Feladat	1	2	3	4
Tanulók száma	27	$2a - 1$	$a + 25$	$a + 10$

A harmadik feladatot helyesen oldotta meg:
A. 45 tanuló B. 55 tanuló C. 65 tanuló D. 75 tanuló

5p **8.** Az alábbi táblázat az euró-lej árfolyam alakulását tartalmazza, egy adott héten belül.

hétfő	kedd	szerda	csütörtök	péntek	szombat	vasárnap
4,59	4,57	4,56	4,53	4,54	4,53	4,53

Az adott héten az euró-lej középárfolyam értéke:
A. 4,57 B. 4,56 C. 4,54 D. 4,55

II. *Írd le az alábbi feladatok részletes megoldását!*

10p **1.** A mellékelt táblázat egy függvényi kapcsolat alapján készült. Készítsd el a függvényi kapcsolat grafikonját!

x	-3	-2	-1	0	3
y	-2	-3	-4	1	4

10p **2.** Egy térkép léptéke 1/500 000.
Töltsd ki a táblázatot!
Figyelj a mértékegységre!

Távolság a térképen (cm)	5		7,5		12
Távolság a terepen (km)		20		350	

3. Az $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \le x \le 3\}$ és $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 6\}$ halmazok között az $x \to y$, $y = -2x + 3$ szabály függvényi kapcsolatot teremt. Készítsd el:

5p a) a függvényi kapcsolat táblázatát;

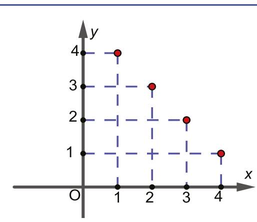
5p b) a függvényi kapcsolatot ábrázoló diagramot;

10p c) a függvényi kapcsolatot ábrázoló grafikont!

4. A mellékelt grafikon az A és B halmazok között létező függvényi kapcsolat alapján készült.

5p a) Határozd meg az A és B halmazt!

5p b) Keress egy képletet, amely alapján y kifejezhető x függvényében!



4 Négyszögek

4.1. A konvex négyszög. Egy konvex négyszög szögei mértékének összege
4.2. A paralelogramma tulajdonságai. Alkalmazások a háromszögek geometriájában
4.3. Sajátos paralelogrammák: téglalap, rombusz, négyzet
4.4. A trapéz: osztályozás, tulajdonságok. A trapéz középvonala
4.5. Kerületek és területek

Sajátos kompetenciák

1.4. 2.4. 3.4. 4.4. 5.4. 6.4.

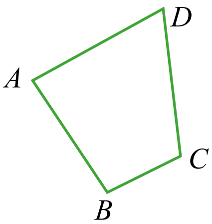
4.1. A konvex négyszög. Egy konvex négyszög szögei mértékének összege

Emlékeztető

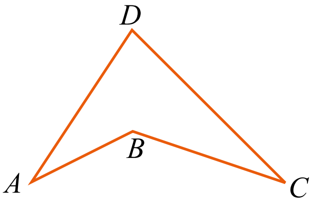
Három nem kollineáris pont meghatároz egy háromszöget. Ha a pontokat az A, B és C betűkkel jelöljük, akkor az ABC háromszögről beszélünk és így írjuk „$ABC\Delta$”.
1. tétel. Egy háromszög belső szögei mértékének összege 180°.
2. tétel. Bármely háromszögben az egyik oldal hossza kisebb, mint a másik két oldal hosszának összege.

A mértan elbűvölő. Különböző alakzatokra vonatkozó kijelentések és következtetések meglepően hasonlóak több mértani felfedezés esetén. Ugyanezeket a hasonlóságokat fogjuk megfigyelni a továbbiakban is.
Négy pont, amelyek között nincs három kollineáris, meghatároz egy négyszöget. Ha a pontokkal A, B, C és D-vel jelöljük, akkor az $ABCD$ négyszögről beszélünk. Sajnos nem létezik olyan jelölés, mint a háromszögek esetében, így a következőképpen írhatjuk: „*ABCD négyszög*”

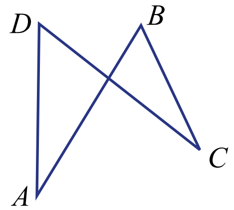
A melléklet alakzatok mindegyike teljesíti azt a feltételt, miszerint olyan négy pont által van meghatározva, melyek között nincs három kollineáris. Tehát ezek a mértani alakzatok négyszögek.



1.a. ábra



1.b. ábra



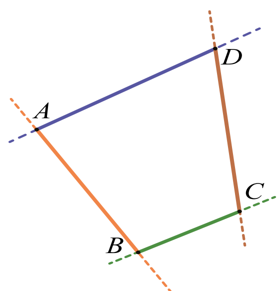
1.c. ábra

Fedezzük fel, értsük meg!

Az A, B, C és D pontokat a négyszög csúcsainak nevezzük. Az AB, BC, CD és DA szakaszokat a négyszög oldalainak nevezzük. Megfigyelhetünk olyan egyeneseket, amelyek tartalmazzák a négyszög oldalait. Ezeket a négyszög oldalaihoz tartozó tartóegyeneseknek nevezzük (szaggatott vonallal vannak jelölve a 2.a, 2.b ábrákon).

Hasonlítsuk össze a 2.a és 2.b. ábrát!

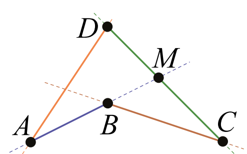
1) A 2.a. ábrán, bármely oldalt választva, annak tartóegyenese nem metszi a másik oldalt, legfeljebb csak a négyszög csúcsait, ami nem érvényes a 2.b. ábrára.
2) Bármely oldalt választva a 2.a. ábráról, annak tartóegyeneséhez viszonyítva, a másik két csúcs ugyanazon az oldalon helyezkedik el, míg a 2.b. ábrán a C és D pont az AB oldal tartóegyenesének különböző oldalain található.



2.a. ábra

1. értelmezés. **Konvex négyszögnek** nevezzük azt a négyszöget, amelyben az oldalak tartóegyenesei nem metszik a többi oldalt, legfeljebb csak a négyszög csúcsaiban.

Azok a négyszögek, amelyek hasonló tulajdonsággal rendelkeznek, mint a 2.a. ábrán látható, konvex négyszögek.



2.b. ábra

2. értelmezés. Egy négyszöget **konkáv négyszögnek** nevezünk, ha bármely két oldal legfeljebb a csúcsokban metszi egymást és amely nem konvex.

Az 1.b. és 2.b. ábrákon lévő négyszögek konkáv négyszögek.
1. megjegyzés. Egy négyszög akkor konvex, ha bármely oldal tartóegyeneséhez viszonyítva a négyszög két csúcsa egyazon oldalon helyezkedik el. A 2.b. ábrán, az AB oldalhoz tartozó tartóegyenes a CD oldalt az M pontban metszi, amely nem a négyszög egyik csúcsa, viszont a D és az A pont a BC egyenes különböző oldalán helyezkedik el.

2. megjegyzés.
Ha $ABCD$ konvex négyszög, akkor felcserélve a csúcsok sorrendjét, a körüljárási iránynak megfelelően, ez konvex marad. (3.a. ábra)
A felcseréléssel a következő négyszögeket kapjuk: $BCDA$, $CDAB$ és $DABC$. A csúcsok bármilyen más felcserélése nem őrzi meg a konvexitás tulajdonságát. (3.b. ábra)

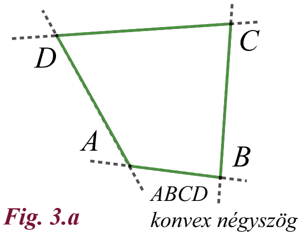


Fig. 3.a

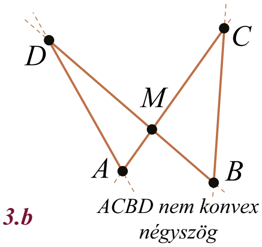


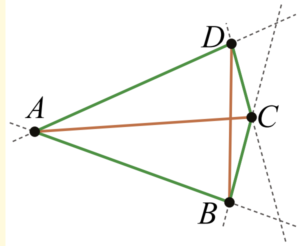
Fig. 3.b

Szómagyarázat: **körüljárás** – ebben az értelemben *körbe-körbe*

A csúcsok sorrendjének fontos szerepe van a négyszögek elnevezésénél, ellentétben a háromszög elnevezésével, ahol ennek nincs jelentősége.
Vizsgáljunk meg részletesebben egy *ABCD konvex négyszöget*, leszögezve a *mértani fogalmakat*, amelyekkel találkozhatunk.

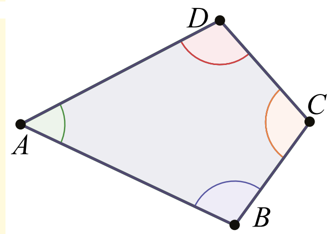
- Az A, B, C és D pontok a négyszög **csúcsai**.
  Az A és B szomszédos csúcsok, ahogy a B és C, C és D és az A és D is.
  Az A és C illetve B és D szemben fekvő csúcsok.
- Az $ABCD$ négyszög **oldalai**: AB, BC, CD és DA. (4. ábra)
  Egy konvex négyszögnek:
  – két pár **szemben fekvő oldala** van: (AB; DC) és (AD; BC);
  – négy pár **egymás melletti oldala** van: (AB; BC), (BC; CD), (CD; DA), (DA; AB).

Mindegyik szomszédos oldalnak van egy **közös pontja**, a négyszög csúcsa. Például az A csúcs az AB és AD oldalak közös pontja.
- Egy konvex négyszög két ellentétes csúcsa meghatároz egy **átlót**: az AC és BD szakaszok az $ABCD$ négyszög átlói.



4. ábra

- Egy konvex négyszög bármely két szomszédos oldala **szöget** alkot. Az $ABCD$ négyszög szögei a következők: $DAB\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$, $BCD\sphericalangle$ és $CDA\sphericalangle$. Ezen szögek csúcsai megegyeznek a négyszög csúcsaival: A, B, C, illetve D. Ha nem áll fenn az összetévesztés veszélye, így is lehet jelölni: $A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$, $C\sphericalangle$, $D\sphericalangle$ és ezeket **belső szögeknek**, vagy egyszerűbben a négyszög szögeinek nevezzük. (5. ábra).
- Egy konvex négyszögnek:
  – négy pár **egymás melletti szöge** van: ($A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$), ($B\sphericalangle$, $C\sphericalangle$), ($C\sphericalangle$, $D\sphericalangle$), ($D\sphericalangle$, $A\sphericalangle$);
  – két pár **szemben fekvő szöge** van: ($A\sphericalangle$, $C\sphericalangle$) és ($B\sphericalangle$, $D\sphericalangle$).
- Két szemben fekvő szög közös része alkotja a konvex négyszög **belső tartományát**.



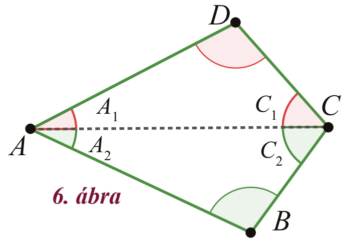
5. ábra

Alkalmazás

1. tétel. Egy háromszög belső szögei mértékének összege 180°.
Feltevődik a kérdés, miszerint egy konvex négyszög belső szögeinek mértéke állandó szám-e? Meglepő, de a válasz: igen.

2. tétel. Egy konvex négyszög belső szögei mértékének összege 360°.

Bizonyítás: Még mielőtt bármilyen bizonyítást elkezdenénk, gondoljunk egy általunk ismert hasonló mértani eredményre! Természetesen a háromszögek „szögei mértékének összege...” kijelentésre utalunk.
Megfigyelve, hogy $360° = 2 \cdot 180°$, megpróbálunk két háromszöget azonosítani, úgy, hogy minél több szög megmaradjon a négyszög szögeiből, de a háromszögek is megfelelően látsszanak.
Megszerkesztünk egy átlót. Legyen AC az említett átló. (6. ábra)



6. ábra

Megkaptuk az ABC és az ACD háromszögeket. A két háromszögben látható az $A_1\sphericalangle$, illetve $A_2\sphericalangle$ szög, amelyek egymás melletti szögek és $A_1\sphericalangle + A_2\sphericalangle = A\sphericalangle$. Hasonlóan, $C_1\sphericalangle + C_2\sphericalangle = C\sphericalangle$.
Az $ABC\Delta$-ben, $A_2\sphericalangle + B\sphericalangle + C_2\sphericalangle = 180°$, az $ACD\Delta$-ben, $A_1\sphericalangle + D\sphericalangle + C_1\sphericalangle = 180°$. Összeadjuk a két összefüggést és figyelembe vesszük az egymás melletti szögek tulajdonságát.
$A_2\sphericalangle + B\sphericalangle + C_2\sphericalangle + A_1\sphericalangle + D\sphericalangle + C_1\sphericalangle = A\sphericalangle + B\sphericalangle + C\sphericalangle + D\sphericalangle = 180° + 180° = 360°$.

A fenti gondolatmenetből azt a tényt emelhetjük ki, miszerint egy előzőleg ismert eredményhez hozzátettünk vagy megváltoztattunk valamit és egy új eredményt kaptunk. Az említett összefüggések, képzettársítások nagyon hasznosak a mértani ismeretek elmélyítésében és a specifikus mértani ismeretek elsajátításában.

Jegyezd meg!

- Azt a négyszöget, amelyben az oldalak tartóegyenesei nem metszik a többi oldalt, legfeljebb csak a négyszög csúcsaiban, **konvex négyszögnek** nevezzük.
- *A csúcsok sorrendje* fontos szerepet játszik a konvex négyszögek elnevezésében.
- ***Egy konvex négyszög belső szögei mértékének összege 360°***.

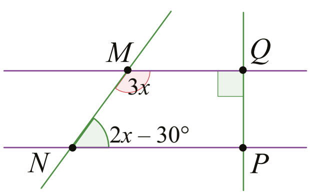
Gyakorlatok és feladatok

1. a) Rajzolj egy $ABCD$ konvex négyszöget!
b) Írd le a négyszög szemben fekvő oldalpárjait!
c) Írd le a négyszög egymás melletti oldalpárjait!
d) Írd le a négyszög szemben fekvő szögpárjait!
e) Írd le a négyszög egymás melletti szögpárjait!

2. Adott az $MNPQ$ konvex négyszög, amelyben $M\sphericalangle = 73°$, $P\sphericalangle = 107°$, $Q\sphericalangle = 64°$. Számítsd ki az $N\sphericalangle$ mértékét!

3 Adott az $ABCD$ négyszög, amelyben $AB \perp AD$, $BC \perp CD$ és $ABD\sphericalangle \equiv BDC\sphericalangle$.
Bizonyítsd be, hogy:
a) $ABC\sphericalangle \equiv ADC\sphericalangle$; b) $AD \equiv BC$; c) $AC \equiv BD$.

4. Az alábbi ábrán az MQ és NP egyenesek párhuzamosak, az MQ és PQ egyenesek pedig merőlegesek egymásra.



Az ábrán megadott adatokat használva határozd meg az $MNPQ$ négyszög szögeinek mértékét!

5. Az $EFGH$ konvex négyszögben érvényesek a következő összefüggések:
$EF \equiv EH$, $GF \equiv GH$, $FEG\sphericalangle = 28°$, $EGH\sphericalangle = 73°$.
Számítsd ki:
a) az $EFGH$ négyszög szögeinek mértékét.
b) az $EFGH$ négyszög átlói által bezárt szög mértékét.

6. Az ABC háromszögben az $ABC\sphericalangle$ mértéke 44°. Legyen az AD magasság, ahol $D \in BC$, M az AB oldal felezőpontja és DN az $ADC\sphericalangle$ szögfelezője, ahol $N \in AC$. Tudva, hogy $AND\sphericalangle \equiv AMD\sphericalangle$ számítsd ki az $AMDN$ négyszög szögeinek mértékét!

7. ABC egyenlő oldalú háromszög; a B pontból az AB egyenesre húzott merőleges az AC egyenest a D pontban metszi, és az E pont a BD szakasz felezőpontja.
a) Készíts a fenti adatoknak megfelelő rajzot.
b) Számítsd ki az $ABEC$ négyszög szögeinek mértékét.

8. ABC egyenlő oldalú háromszög, illetve az $ABCD$ konvex négyszögnek két szemben fekvő szöge derékszögű. Határozd meg a négyszög szögeinek mértékét.

4.2. A paralelogramma tulajdonságai. Alkalmazások a háromszögek geometriájában.

1.ℓ. A paralelogramma. Tulajdonságok

Emlékeztető

A párhuzamossági axióma hosszú történetével és különösen fontos szerepével segítette az euklideszi és nem euklideszi geometria fejlődését. Egy rövid és egyértelmű kijelentés: *egy egyenessel egy rajta kívül fekvő ponton át egy és csakis egy párhuzamos egyenes húzható*.

Két párhuzamos egyenes egy szelővel:
– ***kongruens belső váltószögpárt, külső váltószögpárt, megfelelő szögpárt alkot;***
– ***azonos oldalon lévő külső és belső kiegészítő szögpárokat alkot.***

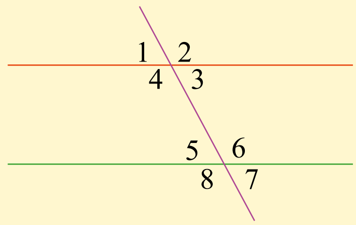


Fig. 1

$4\sphericalangle \equiv 6\sphericalangle$, $3\sphericalangle \equiv 5\sphericalangle$

$1\sphericalangle \equiv 7\sphericalangle$, $2\sphericalangle \equiv 8\sphericalangle$

$1\sphericalangle \equiv 5\sphericalangle$, $2\sphericalangle \equiv 6\sphericalangle$

$4\sphericalangle \equiv 8\sphericalangle$, $3\sphericalangle \equiv 7\sphericalangle$

$4\sphericalangle + 5\sphericalangle = 180°$

$3\sphericalangle + 6\sphericalangle = 180°$

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 = 180°$

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 = 180°$

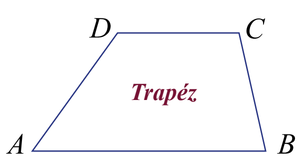
VI. osztályban nagyon sok energiát fektettünk a párhuzamosságba. Észrevettük, hogy sok esetben két egyenes párhuzamosságát kell bebizonyítani, más esetben tudjuk, hogy a két egyenes párhuzamos egymással, illetve tudva ezt a tényt, más tulajdonságokat is bebizonyítottunk.
Egy kis időre álljunk meg, és csodáljuk meg *egy mértani fogalom erejét*. Egy egyszerű kijelentésből arra következtethetünk, hogy egy egyenes, amely átszel két párhuzamos egyenest, 8 kongruens szögpárt és 4 kiegészítő szögpárt eredményez.
A ***párhuzamossági kritériumok*** azok az elégséges feltételek, amelyek alapján egy szelővel metszett két egyenes párhuzamos legyen. Ezek olyan technikákra tanítanak minket, amelyekkel be tudjuk bizonyítani, hogy két egyenes párhuzamos akkor is, ha a meghatározás nem mindig hatékony.
Természetesen feltevődik a kérdés: a fenti 12, szögek közötti összefüggésből hány kell teljesüljön ahhoz, hogy az egyenesek párhuzamosak legyenek?

- Ha két egyenes egy szelővel egy kongruens **belső váltószögpárt** vagy egy kongruens **külső váltószögpárt** vagy egy kongruens **megfelelő szögpárt** alkot, akkor a két egyenes párhuzamos.
- Ha két egyenes és egy szelő által alkotott, a szelőnek **azonos oldalán lévő belső** vagy **azonos oldalán lévő külső szögpárok kiegészítő szögek**, akkor a két egyenes párhuzamos.

Fedezzük fel, értsük meg!

Kérdés: Milyen tulajdonságokkal bővül egy konvex négyszög, ha szemben fekvő oldalai párhuzamosak?

- Azt a konvex négyszöget, amelynek **csak két szemben fekvő oldala párhuzamos, trapéznak** nevezzük.
- Azt a konvex négyszöget, amelynek **két-két szemben fekvő oldala párhuzamos, paralelogrammának** nevezzük.



2.a. ábra

2.b. ábra

A paralelogramma „bajnok” a tulajdonságainak számát tekintve. A paralelogramma tulajdonságainak lenyűgöző hatása van más sokszög tulajdonságainak bizonyítására.

> *Szómagyarázat*
> **sokszög** – egy olyan zárt síkidom, amelyet három vagy több szakasz (oldal) alkot

Vizsgáljuk meg a 2.b ábrát, megfigyelve az AB és CD, majd az AD és BC párhuzamos oldalakat.

1) $AB \parallel DC$ és az AD szelő. A paralelogramma A és D szögei a szelő azonos oldalán lévő belső szögek, így kiegészítő szögek, vagyis $A\sphericalangle + D\sphericalangle = 180^\circ$. Mivel egy négyszög szögei mértékének összege 360°, következik, hogy $B\sphericalangle + C\sphericalangle = 180^\circ$.
2) $AD \parallel BC$ és az AB szelő. A paralelogramma A és B szögei a szelő azonos oldalán lévő belső szögek, így kiegészítő szögek, vagyis $A\sphericalangle + B\sphericalangle = 180^\circ$. Mivel egy négyszög szögei mértékének összege 360°, következik, hogy $C\sphericalangle + D\sphericalangle = 180^\circ$. Megkaptuk (bebizonyítottuk) a paralelogramma első tulajdonságát:

1. tétel. Egy paralelogrammában **az egymás melletti szögek kiegészítő** szögek.

$A\sphericalangle + B\sphericalangle = 180^\circ$ $\quad$ $B\sphericalangle + C\sphericalangle = 180^\circ$

$C\sphericalangle + D\sphericalangle = 180^\circ$ $\quad$ $A\sphericalangle + D\sphericalangle = 180^\circ$

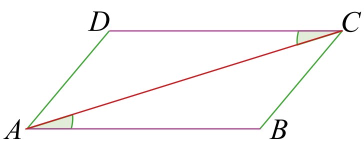
Alkalmazzuk ezt a tulajdonságot, illetve észrevesszük, hogy a $D\sphericalangle$ kiegészítő szög az $A\sphericalangle$-gel is, a $C\sphericalangle$-gel is. Tehát $A\sphericalangle \equiv C\sphericalangle$. Nyilvánvaló, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk a $B\sphericalangle$ és $D\sphericalangle$ esetében is. Bebizonyítottuk, a következőt:

2. tétel. Egy paralelogrammában **a szemben fekvő szögek kongruensek.**

$A\sphericalangle \equiv C\sphericalangle$

$B\sphericalangle \equiv D\sphericalangle$

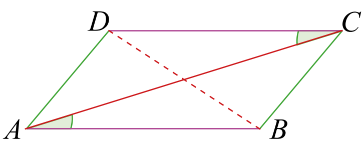
Rajzoljunk meg egy átlót (3. ábra). Ez új megoldásokhoz vezet? Az AC egyenes szelője a paralelogramma mindkét párhuzamos oldalpárjának. A $DCA\sphericalangle$ és $BAC\sphericalangle$ belső váltószögei az AB és CD párhuzamosok esetén, és a $DAC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle$ belső váltószögek a BC és AD párhuzamosok esetén, tehát az átló, a szemben fekvő oldalakkal, két kongruens szögpárt határoz meg. A BD átló esetében is hasonló megoldást kapunk.



3. ábra

3. tétel.
Egy paralelogramma bármely **átlója** a szemben fekvő **oldalakkal kongruens** szögeket alkot.

$DCA\sphericalangle \equiv BAC\sphericalangle$
$DAC\sphericalangle \equiv BCA\sphericalangle$
$CDB\sphericalangle \equiv ABD\sphericalangle$
$ADB\sphericalangle \equiv CBD\sphericalangle$



4. ábra

Észrevesszük, hogy a keletkezett háromszögeknek (3. ábra) kongruens elemei vannak. Az SZ.O.SZ. vagy O.SZ.SZ. kongruencia esetek valamelyikéből kapjuk, hogy $ACB\Delta \equiv CAD\Delta$, Elérkeztünk a paralelogramma egy újabb tulajdonságához:

4. tétel.
Egy paralelogramma **szemben fekvő oldalai kongruensek**.

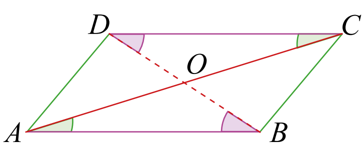
$AB \equiv CD$ $\quad$ $AD \equiv CB$

Figyeljük meg az 5. ábrát! Megrajzoltuk a paralelogramma átlóit, majd az O ponttal jelöltük metszéspontjukat. A keletkezett négy háromszög felkelti a figyelmünket. Észrevesszük, hogy $OAB\sphericalangle \equiv OCD\sphericalangle$ és $OBA\sphericalangle \equiv ODC\sphericalangle$, de a 4. tétel azt mondja, hogy a párhuzamos oldalak kongruensek is, tehát $AB \equiv CD$. Következtetésképpen, $OAB\Delta \equiv OCD\Delta$ (SZ.O.SZ.). Tehát $OA \equiv OC$ és $OB \equiv OD$. Így bebizonyítottuk, hogy az O pont mindkét átló felezőpontja. Azt mondjuk, hogy az O pont felezi az átlókat.

5. tétel. Egy paralelogramma **átlói felezik egymást**.

$OA \equiv OC$

$OB \equiv OD$

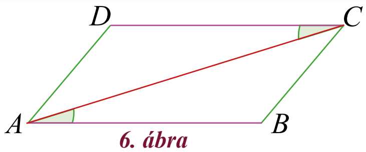


5. ábra

Alkalmazás

Felmerül egy újabb **kérdés**: Melyek azok az információk, melyeket egy feladat feltevésében, illetve megoldásának folyamatában tudnunk kell ahhoz, hogy egy konvex négyszög paralelogramma legyen?
Olyan ***elégséges feltételeket*** keresünk, melyek alapján egy konvex négyszög paralelogramma lesz. A tanult tulajdonságok melyike, illetve ezek közül hány elégséges, ahhoz, hogy teljesüljön a paralelogramma többi tulajdonsága?

6. tétel
Ha egy konvex négyszög **két szemben fekvő oldala párhuzamos és kongruens is**, akkor az paralelogramma.



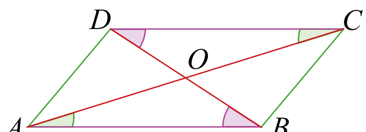
6. ábra

Bizonyítás. Legyenek az AB és CD oldalak párhuzamosak és kongruensek egymással. Ahhoz, hogy $ABCD$ paralelogramma legyen, teljesülnie kell annak, hogy az AD és BC oldalak párhuzamosak. Megrajzoljuk az AC átlót. (6. ábra)
Az $AB \parallel CD$ párhuzamosság alapján teljesül, hogy $CAB\sphericalangle \equiv ACD\sphericalangle$.
A feltevés alapján $AB \equiv CD$, AC az $ADC\Delta$ és a $CBA\Delta$ közös oldala.
Használva az O.SZ.O. kongruencia esetet, kapjuk, hogy $ADC\Delta \equiv CBA\Delta$ tehát $DAC\sphericalangle \equiv BCA\sphericalangle$.
Bebizonyítottuk, hogy az AD és BC az AC szelővel kongruens belső váltószögeket alkot, tehát párhuzamosak, így a meghatározás alapján $ABCD$ paralelogramma.

7. tétel
Ha egy konvex négyszög **szemben fekvő oldalai** páronként **kongruensek**, akkor az a négyszög paralelogramma.

Bizonyítás. Adottak az $ADC\Delta$ és $CBA\Delta$ háromszögek.
A feltevés alapján $AB \equiv CD$ és $AD \equiv BC$. Mivel az AC a két háromszög közös oldala, következik, hogy $ADC\Delta \equiv CBA\Delta$, tehát a háromszögek megfelelő szögei kongruensek. Ezek viszont belső váltószögek, melyeket két szemben fekvő oldal és az átló (szelő) határozott meg, így a két szemben fekvő oldal párhuzamos. A meghatározás alapján, az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

8. tétel
Ha egy konvex négyszög **átlói felezik egymást**, akkor az a négyszög paralelogramma.



7. ábra

Bizonyítás. Alkossunk két kongruens háromszögpárt. (7. ábra)
1) $OAB\Delta$ és $OCD\Delta$: $AO \equiv OC$, $BO \equiv OD$ és $AOB\sphericalangle \equiv COD\sphericalangle$ (csúcsszögek). Az O.SZ.O. kongruencia esetből következik, hogy $OAB\Delta \equiv OCD\Delta$, így $OAB\sphericalangle \equiv OCD\sphericalangle$. Az AB és CD egyenesek, az AC szelővel kongruens belső váltószögpárt alkotnak, tehát $AB \parallel CD$.
2) $AOD\Delta$ és $COB\Delta$: $AO \equiv OC$, $OD \equiv OB$ és $AOD\sphericalangle \equiv COB\sphericalangle$ (csúcsszögek). Az O.SZ.O. kongruencia esetből következik, hogy $AOD\Delta \equiv COB\Delta$, így $OAD\sphericalangle \equiv OCB\sphericalangle$. Az AD és CB egyenesek a AC szelővel kongruens belső váltószögpárt alkotnak, tehát $AD \parallel CB$. Az $ABCD$ négyszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak, tehát $ABCD$ paralelogramma.

9. tétel
Ha egy konvex négyszögben **minden egymás melletti szögpár kiegészítő szög**, akkor a négyszög paralelogramma.

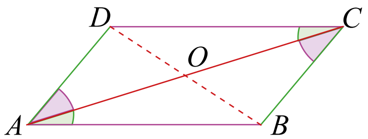
Bizonyítás. Egy konvex négyszögben, bármely két egymás melletti szöget a szelő ugyanazon oldalán lévő belső szögnek lehet tekinteni, két szemben fekvő oldal esetén. A szelő a másik két oldal egyike. A megfelelő párhuzamossági feltételt használva kapjuk, hogy a két szemben fekvő oldal párhuzamos. A meghatározás alapján a négyszög paralelogramma.

10. tétel
Ha egy konvex négyszög **két-két szemben fekvő szöge kongruens**, akkor a négyszög paralelogramma.

Bizonyítás. Tekintsünk két egymás melletti szöget, például az $A\sphericalangle$-et és $B\sphericalangle$-et. Mivel $A\sphericalangle \equiv C\sphericalangle$ és $B\sphericalangle \equiv D\sphericalangle$, kapjuk, hogy $A\sphericalangle + B\sphericalangle \equiv C\sphericalangle + D\sphericalangle$. Mivel egy konvex négyszög szögei mértékének összege 360°, $A\sphericalangle + B\sphericalangle \equiv C\sphericalangle + D\sphericalangle = 180°$. Hasonlóan kapjuk az $A\sphericalangle$ és $D\sphericalangle$, illetve $B\sphericalangle$ és $C\sphericalangle$ egymás melletti szögek esetében is, tehát az előző tételből következik, hogy a négyszög paralelogramma.

11. tétel

Ha egy konvex négyszögben **egy átló bármely két szemben fekvő oldalpárral kongruens szögeket zár be,** akkor a négyszög paralelogramma.



8. ábra

Bizonyítás:
A 8. ábrán lévő AC átló a szemben fekvő oldalakkal kongruens szögeket alkot:
$DCA\sphericalangle \equiv BAC\sphericalangle$ és $DAC\sphericalangle \equiv BCA\sphericalangle$.
Mivel ezek belső váltószögek az AB és DC egyenesekkel, ahol AC szelő, illetve belső váltószögek az AD és BC egyenesekkel, ahol AC szelő, kapjuk, hogy
$AB \parallel DC$ és $AD \parallel BC$, vagyis a négyszög paralelogramma.

Jegyezd meg!

Meghatározás: Azt a konvex négyszöget, amelynek a **két-két szemben fekvő oldalpárja párhuzamos, paralelogrammának nevezzük.**

Ha egy négyszög paralelogramma, akkor:
- a **szemben fekvő oldalai** párhuzamosak.
- a **szemben fekvő oldalai kongruensek**.
- a **szemben fekvő szögei kongruensek**.
- az **egymás melletti szögei kiegészítő** szögek.
- **bármely átló** *a szemben fekvő oldalakkal* **kongruens szögeket** alkot.
- **az átlók felezik egymást**.

Ahhoz, hogy egy konvex négyszög paralelogramma legyen, elégséges, hogy egy feltétel megvalósuljon az alábbiak közül:
- a négyszögnek mindkét **szemben fekvő oldalpárja kongruens** legyen;
- a négyszögnek **két** szemben fekvő **oldala párhuzamos** és **kongruens** is legyen;
- a négyszögnek **két-két szemben fekvő szöge kongruens** legyen;
- a négyszögben minden **egymás melletti szögpár egymás kiegészítő** szöge legyen;
- **egy átló bármely két szemben fekvő oldalpárral kongruens szögeket zár be;**
- a négyszög **átlói felezzék egymást**.

Gyakorlatok és feladatok

1. a) Rajzolj egy *ABCD* paralelogrammát!
b) Azonosítsd:
- a párhuzamos oldalpárokat;
- a kongruens oldalpárokat;
- a kongruens szögpárokat;
- a kiegészítő szögpárokat.

2. Adott az *ABCD* paralelogramma, amelyben $AB = 7$ cm és $BC = 9$ cm. Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét.
p_1: $CD = 7$ cm
p_2: $AD = 9$ cm
p_3: $AC > 16$ cm

3. Rajzolj egy *MNPQ* paralelogrammát tudva, hogy:
a) $MQ = 6$ cm, $M\sphericalangle = 50°$, $MN = 4$ cm;
b) $N\sphericalangle + Q\sphericalangle = 210°$, $NP = 2 \cdot PQ = 10$ cm.

4. a) Számítsd ki az *ABCD* paralelogramma szögeinek mértékét, tudva, hogy az $A\sphericalangle = 100°$.
b) Számítsd ki a *DEFG* paralelogramma szögeinek mértékét, ha $D\sphericalangle = 1{,}5 \cdot (E\sphericalangle)$.
c) Számítsd ki az *ABCD* paralelogramma szögeinek mértékét, ha $A\sphericalangle + B\sphericalangle + C\sphericalangle = 300°$.

5. Rajzoljatok egy *ABCD* paralelogrammát. Legyen az átlóinak metszéspontja a *P* pont. Egészítsétek ki:
a) Ha $AC = 20$ cm, akkor $AP = \ldots$ cm és $CP = \ldots$ cm.
b) Ha $BP = 7{,}5$ dm, akkor $DP = \ldots$ dm és $BD = \ldots$ cm.

6. Az *ABC* és *BCD* háromszögek egyenlő oldalúak, és az *A* pont különbözik a *D* ponttól. Bizonyítsátok be, hogy az *ABDC* négyszög paralelogramma.

7. Adott az $MNPQ$ paralelogramma. Az E pont az MN szakasz felezőpontja, és az F pont a PQ szakasz felezőpontja. Igazoljátok, hogy:
a) $EF \equiv MQ$; b) $EF \parallel NP$.

8. Az $ABCD$ paralelogrammában, M pont az AB oldal felezőpontja, és $DM \cap BC = \{E\}$. Mutassátok ki, hogy:
a) $ADM\Delta \equiv BEM\Delta$;
b) $ADBE$ paralelogramma.

9. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB > BC$. A $BAD\sphericalangle$ szögfelezője metszi a CD oldalt az E pontban és a $BCD\sphericalangle$ szögfelezője metszi az AB oldalt az F pontban.
a) Mutasd ki, hogy $ADE\Delta$ egyenlő szárú.
b) Mutasd ki, hogy $AECF$ paralelogramma!

10. Adott az $ABCD$ paralelogramma, ahol $AC \cap BD = \{O\}$. Az O ponton keresztül szerkesztünk egy d egyenest, amely metszi az AB és CD oldalakat az E és F pontban, illetve a BC és AD oldalak meghosszabbítását a P és Q pontban. Bizonyítsd be, hogy:
a) $EO \equiv OF$;
b) $BPDQ$ és $APCQ$ paralelogramma.

11. Az EF és GH oldalakon, az $EFGH$ paralelogrammában tekintsük az A és B pontokat úgy, hogy $EF = 3AE$ és $HB = 2BG$. Igazold, hogy:
a) $EA \equiv BG$;
b) $AEBG$ paralelogramma;
c) EG, FH és AB összefutó egyenesek.

12. A P pont rajta van az ABC háromszög BC oldalán. Az M és N pont a P pontnak az AB illetve AC oldalak felezőpontjai szerinti szimmetrikusa.
Bizonyítsd be, hogy:
a) az M, A, N pontok kollineárisak;
b) $BCNM$ paralelogramma.

13. Az M pont a DEF háromszög EF oldalának felezőpontja. Az E ponton keresztül húzott egyenes, amely párhuzamos a DM egyenessel, a DF egyenest az N pontban metszi, és a P pont az M pontnak a D pont szerinti szimmetrikusa.
a) Igazold, hogy $EF \parallel NP$.
b) Bizonyítsd be, hogy $MN \equiv PF$.

14. Az $MNPQ$ paralelogrammában $M\sphericalangle > N\sphericalangle$. Legyen $MR \perp MN$, $R \in NP$ és $PS \perp PQ$, $S \in MQ$. Bizonyítsd be, hogy:
a) $MRPS$ és $NRQS$ paralelogramma;
b) MP, NQ és RS összefutó egyenesek.

15. A BC alapú ABC háromszög egyenlő szárú, és AD a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője, ahol $D \in BC$. A DP szakasz oldalfelező az ABD háromszögben és a DQ szakasz oldalfelező az ACD háromszögben.
a) Mutasd ki, hogy $APD\sphericalangle \equiv AQD\sphericalangle$.
b) Igazold, hogy $CDPQ$ paralelogramma.
c) Ha $PQ \cap AD = \{E\}$, számítsd ki az $\dfrac{ED}{AD}$ arány értékét.

16. Az $ABCD$ paralelogrammában $AD \perp BD$, $CBD\sphericalangle = 3 \cdot (ABD\sphericalangle)$ és $AB = 24$ cm. Társítsd az első oszlopban lévő, betűvel jelölt, kifejezést a második oszlopban lévő számmal, úgy, hogy igaz legyen.

a) $ABC\sphericalangle =$	1. 100°
	2. 120°
b) $C\sphericalangle =$	3. 60°
	4. 72 cm
c) $BC =$	5. 12 cm
d) $\mathcal{K}_{ABCD} =$	6. 102 cm

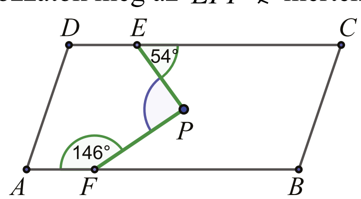
17. Az AD oldalfelező az ABC és az AMN háromszögben is, ahol $M \notin BC$. Mutasd ki, hogy az a négyszög, amelynek csúcsai a B, C, M, N pontok, paralelogramma!

18. Legyen C az AB szakasz felezőpontja. A d egyenes metszi az AC és BC szakaszok felezőmerőlegeseit a D illetve E pontokban, amelyek az AB egyenes ugyanazon oldalán helyezkednek el. Ha $DC \equiv EC$, akkor igazold, hogy $ADEC$ paralelogramma!

19. Az $ABCD$ paralelogramma DC és BC oldalainak felezőpontja az E illetve F pont. Az AE egyenes a BC egyenest a G pontban, az AF egyenes a DC egyenest a H pontban metszi. Mutasd ki, hogy $DBHG$ paralelogramma!

20. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AC \cap BD = \{O\}$. Tudjuk, hogy $AO \equiv OC$ és $ABC\sphericalangle \equiv ADC\sphericalangle$. Bizonyítsd be, hogy az adott négyszög paralelogramma.

21. A P pont az $ABCD$ paralelogramma belső tartományában, az E és F pont a paralelogramma oldalain helyezkedik el. Felhasználva az ábrán látható adatokat, határozzátok meg az $EPF\sphericalangle$ mértékét.



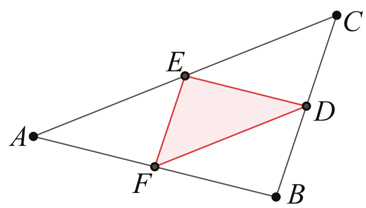
2.ℓ. A paralelogramma alkalmazása a háromszögek geometriájában

Emlékeztető

1) **Oldalfelezőnek** nevezzük azt a szakaszt, amely összeköti a háromszög egyik csúcsát a szemben fekvő oldal felezőpontjával.
   Egy háromszög oldalfelezői összefutó egyenesek. Az oldalfelezők metszéspontját általában G-vel jelöljük és a háromszög **súlypontjának** nevezzük.
2) Egy szakasz felezőmerőlegese merőleges a szakaszra és átmegy annak felezőpontján.
   Egy háromszög **felezőmerőlegesei** összefutó egyenesek. A felezőmerőlegesek metszéspontját általában O-val jelöljük és ez a **háromszög köré írt kör középpontja**.
3) Egy háromszög **magasságának** nevezzük a háromszög egyik csúcsából a szemközti oldal tartóegyenesére bocsátott merőleges szakaszt.
   Egy háromszög magasságvonalai összefutó egyenesek. A magasságok metszéspontját általában H-val jelöljük és a háromszög **ortocentrumának** vagy **magasságpontjának** nevezzük.
4) **Szögfelezőnek** nevezzük azt a félegyenest, amely a szög csúcsából indul, a szögtartomány belsejében halad, és a szöget két kongruens szögre osztja.
   Egy háromszög szögfelezői összefutó egyenesek. A szögfelezők metszéspontját általában I-vel jelöljük és ez a **háromszögbe írt kör középpontja**.

Fedezzük fel, értsük meg!

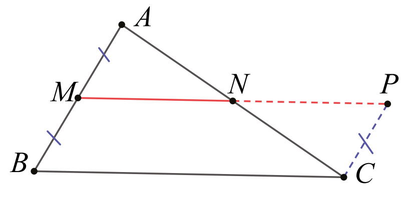
Értelmezés. Egy háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a háromszög **középvonalának** nevezzük.



1) Az oldalak *felezőpontjai* a D, E, F pontok.
2) Az ABC háromszög középvonalai a DE, EF, FD szakaszok.

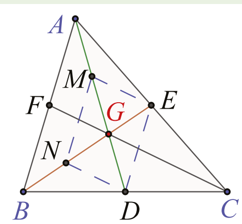
1. tétel. Egy háromszög két oldalának felezőpontja által meghatározott középvonal párhuzamos a harmadik oldallal és a hossza egyenlő ezen oldal hosszának felével.

Bizonyítás. Adott ez $ABC\Delta$ és az MN középvonal, ahol $M \in AB$, $N \in AC$. Meghosszabbítjuk az MN egyenest az $NP \equiv MN$ szakasszal. Mivel az N pont az AC szakasz felezőpontja, így az $AMCP$ négyszögben az átlók felezik egymást. Tehát az $AMCP$ egy paralelogramma. Következik, hogy $PC \parallel AM$ és $PC = AM$. Mivel az M pont az AB oldal felezőpontja, következik, hogy $PC \parallel BM$ és $PC = BM$, ami azt mutatja, hogy a $BCPM$ paralelogramma. Így egymás után következik, hogy: $MP \parallel BC$ és $MP = BC$, vagyis $MN \parallel BC$ és $2MN = BC$, végül $MN \parallel BC$ és $MN = \dfrac{BC}{2}$.



2. tétel. Egy háromszög súlypontja rajta van mindegyik oldalfelezőn; a súlypont kétharmad részre van a háromszög egyik csúcsától és egyharmad részre van a csúccsal szemben fekvő oldal felezőpontjától.

Bizonyítás: Adott az $ABC\Delta$ és az AD és BE oldalfelezők.
Az AD és BE metsző egyenesek, mivel az AB szelő ugyanazon oldalán levő belső szögek nem kiegészítő szögek. Ez igaz, mivel a $DAB\sphericalangle + EBA\sphericalangle < A\sphericalangle + B\sphericalangle < 180°$. Jelöljük $\{G\} = AD \cap BE$.
Legyen M és N az AG illetve BG szakaszok felezőpontjai.



A GAB háromszögben az MN középvonal, tehát $MN \parallel AB$ és $MN = \dfrac{AB}{2}$.

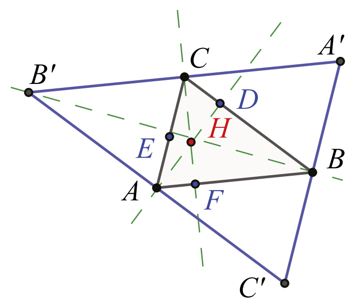
A CAB háromszögben a DE középvonal, tehát $DE \parallel AB$ és $DE = \dfrac{AB}{2}$.

Következik, hogy $MN \parallel DE$, $MN = DE$, ami azt mutatja, hogy a $DEMN$ négyszög paralelogramma és átlói felezik egymást. Következik, hogy $AM = MG = GD$ és $BN = NG = GE$. Végül következik, hogy $AG = \dfrac{2}{3}AD$, $GD = \dfrac{1}{3}AD$, $BG = \dfrac{2}{3}BE$ és $GE = \dfrac{1}{3}BE$. Hasonlóan bizonyítjuk, hogy G pont rajta van a CF oldalfelezőn is és $CG = \dfrac{2}{3}CF, GF = \dfrac{1}{3}CE$. Az a pont, amely az AD oldalfelezőn helyezkedik el egyharmadnyi távolságra az alaptól és kétharmadnyira a csúcstól, egyértelműen meghatározott. Arra a következtetésre jutunk, hogy a három oldalfelezőnek van egy közös pontja, amit G-vel jelölünk és *súlypontnak* nevezünk.

3. tétel. Egy háromszög magasságvonalai összefutó egyenesek. A magasságok metszéspontját általában H-val jelöljük és a háromszög *ortocentrumának* vagy *magasságpontjának* nevezzük.

Ahhoz, hogy bizonyítani tudjuk ezt a tételt, a paralelogramma tulajdonságait fogjuk használni és a következő, VI. osztályban tanult eredményt: *Egy háromszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást, amit a háromszög köré írt kör középpontjának nevezünk.*

Bizonyítás. Meghúzzuk az A, B és C pontokon keresztül a BC, AC, illetve AB-vel párhuzamos egyeneseket, amelyek metszik egymást páronként az A', B' és C' pontokban. A $BCAC'$ és $BCB'A$ négyszögek oldalai párhuzamosak, tehát ezek paralelogrammák. Így a B', A, C' pontok kollineárisak és $C'A \equiv BC \equiv AB'$, vagyis az A felezőpontja a $B'C'$-nek.

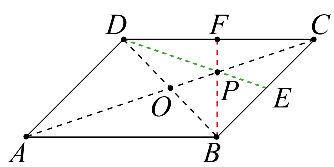


Az AD magasság merőleges a BC-re, és $BC \parallel B'C'$, tehát $AD \perp B'C'$. Következtetésképpen az $ABC\Delta$ A-ból húzott magassága felezőmerőlegese az $A'B'C'$ háromszög $B'C'$ oldalának. Ugyanezzel a gondolatmenettel mutatjuk ki, hogy a B-ből húzott magasság az $A'B'C'$ háromszög $A'C'$ oldalának felezőmerőlegese, és a C-ből húzott magasság az $A'B'C'$ háromszög $B'A'$ oldalának felezőmerőlegese. Egy háromszögben a felezőmerőlegesek összefutó egyenesek, az $ABC\Delta$ magasságai a felezőmerőlegeseken vannak, így összefutóak. Jelöljük ezt a pontot H-val, és nevezzük az $ABC\Delta$ ortocentrumának vagy magasságpontjának.

Alkalmazás

1. alkalmazás: Az $ABCD$ paralelogrammában E a BC oldal felezőpontja, $AC \cap BD = \{O\}$ és $AC \cap DE = \{P\}$. Bizonyítsátok be, hogy a BP egyenes tartalmazza a CD oldal felezőpontját!

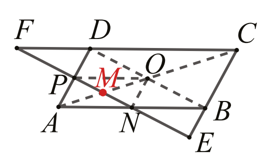
Megoldás. Az $ABCD$ paralelogrammában az AC és BD szakaszok átlók, tehát felezik egymást, így a $BCD\Delta$-ben a CO oldalfelező.



Mivel DE is oldalfelező, következik, hogy a P pont a háromszög súlypontja, tehát a B-ből húzott oldalfelező tartalmazza a P súlypontot. Ha $BP \cap CD = \{F\}$, akkor a BF oldalfelező és F a CD oldal felezőpontja.

2. alkalmazás. Adott az $ABCD$ paralelogramma, ahol $AC \cap BD = \{O\}$ és M az AO szakasz felezőpontja. Az EF egyenes tartalmazza az M pontot és párhuzamos a BD egyenessel, ahol $E \in BC$, $F \in CD$. Bizonyítsátok be, hogy az O pont a CEF háromszög súlypontja!

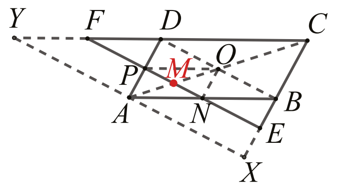
I. megoldás. A paralelogramma tulajdonságából következik, hogy $AO = CO$, így $AO = 2 \cdot MO$, tehát $MO = \dfrac{CM}{3}$. (1)



Bizonyítanunk kell, hogy CM a CEF háromszögben oldalfelező.

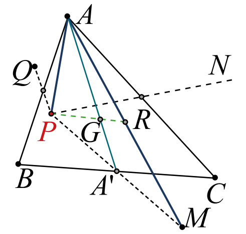
Legyen $EF \cap AB = \{N\}$ és $EF \cap AD = \{P\}$. Az $AOB\Delta$-ben M az AO felezőpontja, $N \in AB$ és $MN \parallel OB$. Következik, hogy N az AB oldal felezőpontja és $MN = \dfrac{BO}{2}$.

Az $AOD\Delta$-ben M az AO felezőpontja, $P \in AD$ és $MP \parallel OD$. Következik, hogy P felezőpontja az AD oldalnak és MP középvonal az $AOD\Delta$-ben, tehát $MP = \dfrac{DO}{2}$. Mivel $BO = DO$, következik, hogy $MN = MP$. (2)
NO középvonal a $BDA\Delta$-ben $\Rightarrow NO \parallel AD \parallel BC$, a feltevés alapján $NE \parallel OB$, tehát $BENO$ egy paralelogramma, ahol $EN = BO$. Hasonlóan a $DFPO$ szemben fekvő oldalai párhuzamosak, így $DFPO$ egy paralelogramma és $FP = DO$, így következik, hogy $EN = FP$. Felhasználva a (2)-es összefüggést, következik, hogy $EM = FM$.
Következtetésképpen CM oldalfelező a $CEF\Delta$-ben, és az (1)-es összefüggésből következik, hogy az O súlypont ebben a háromszögben.



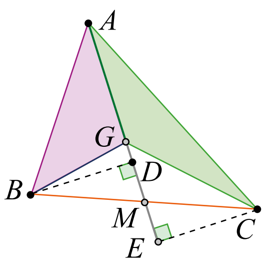
II. megoldás. A BD egyenessel párhuzamost húzunk az A pontból, ami metszi a BC egyenest X és a CD egyenest az Y pontban. A $DAXB$ és $DBAY$ paralelogrammák (szemben fekvő oldalaik párhuzamosak). Így az $AOB\Delta$-ben $MN = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{BD}{4}$, és az $ABX\Delta$-ben $NE = \dfrac{AX}{2} = \dfrac{BD}{2}$, tehát $ME = \dfrac{3}{4}BD$. Hasonlóan $MF = \dfrac{3}{4}BD$. Így kapjuk, hogy $ME = MF$, tehát a CM oldalfelező a $CFE\Delta$-ben. Felhasználva az (1)-es összefüggést, kapjuk, hogy O súlypont a $CFE\Delta$-ben.

3. alkalmazás. Az ABC háromszögnek G a súlypontja és P a háromszög egyik belső pontja, amely különbözik a G ponttól. Legyen M, N és Q a P pont BC, CA és AB oldalak felezőpontja szerinti szimmetrikusa.
a) Igazoljátok, hogy a G pont az APM háromszögben is súlypont.
b) Igazoljátok, hogy AM, BN és CQ összefutó egyenesek.



Megoldás. a) Legyen A' a BC oldal felezőpontja. Mivel M a P pontnak az A' szerinti szimmetrikusa, következik, hogy P, A' és M kollineárisak és $PA' = A'M$, tehát AA' oldalfelező az APM háromszögben, így a G súlypont.
b) Hasonlóan, G súlypont a BPN és CPQ háromszögekben. Legyen R az AM szakasz felezőpontja. Ekkor $G \in PR$ és $PG = 2\ GR$. Legyen S a BN szakasz felezőpontja. Ekkor $G \in PS$ és $PG = 2\ GS$. Legyen T a CQ szakasz felezőpontja. Ekkor, $G \in PT$ és $PG = 2\ GT$. Következik, hogy $R = S = T$, tehát az AM, BN, CQ egyenesek összefutóak.

4. alkalmazás. Adott az ABC háromszög és G a háromszög egyik belső pontja. Igazoljátok, hogy G az ABC háromszög súlypontja, akkor és csakis akkor, ha az ABG, BCG és ACG háromszögek területei egyenlőek.



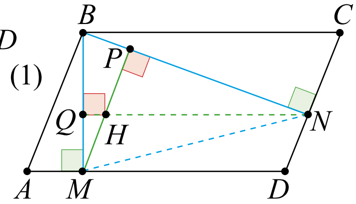
Megoldás. Észrevesszük, hogy a feladat szövegében megjelenik az „akkor és csakis akkor" kifejezés, ami arra utal, hogy két implikációt kell igazolni:

1) Ha az ABC háromszögnek G súlypontja, akkor az ABG, BCG és ACG háromszögek területei megegyeznek.
2) Ha az ABG, BCG és ACG háromszögek területei megegyeznek, akkor G az ABC háromszög súlypontja.

1) Ha G az ABC háromszög súlypontja és $AG \cap BC = \{M\}$, akkor M a BC oldal felezőpontja. Szerkesszük meg a $BD \perp AG$ és $CE \perp AG$ merőlegeseket, ahol $D, E \in AG$. Az Á.H. kongruencia eset alapján, következik, hogy $BDM\Delta \equiv CEM\Delta$, ahonnan $BD = CE$ és $\mathcal{T}_{ABG} = \dfrac{AG \cdot BD}{2} = \dfrac{AG \cdot CE}{2} = \mathcal{T}_{ACG}$.
Hasonló gondolatmentettel következik, hogy $\mathcal{T}_{ABG} = \mathcal{T}_{BCG}$, tehát $\mathcal{T}_{ABG} = \mathcal{T}_{ACG} = \mathcal{T}_{BCG}$.

2) Ha $\mathcal{T}_{ABG} = \mathcal{T}_{ACG}$, akkor $\dfrac{AG \cdot BD}{2} = \dfrac{AG \cdot CE}{2}$, vagyis $BD = CE$ és $BDM\Delta \equiv CEM\Delta$, tehát $BM = CM$ és M a BC oldal felezőpontja. Mivel a G pont rajta van az AM szakaszon, következik, hogy G rajta van az AM oldalfelezőn. Hasonlóan folytatva a $\mathcal{T}_{ABG} = \mathcal{T}_{BCG}$ összefüggésből következik, hogy G rajta van az ABC háromszög B pontjából húzott oldalfelezőn is, vagyis G az $ABC\Delta$ súlypontja.

5. megoldás. Adott az $ABCD$ paralelogramma, ahol az A szög hegyesszög és $BM \perp AD$, $M \in AD$, $BN \perp CD$, $N \in CD$. Tudva, hogy H a BMN háromszög ortocentruma, mutassátok ki, hogy $DMHN$ paralelogramma.



I. megoldás. Legyen MP és NQ a $BMN\Delta$ magassága és $MP \cap NQ = \{H\}$. Az $MPND$ négyszögben $MPN\sphericalangle + PND\sphericalangle = 180° \Rightarrow PMD\sphericalangle + MDN\sphericalangle = 180°$, tehát $HM \parallel DN$. (1)
Mivel $BM \perp AD$ és $NQ \perp BM$, következik, hogy $AD \parallel NQ$, tehát $DM \parallel HN$. (2)
Felhasználva a paralelogramma értelmezését, az (1)-es és (2)-es összefüggésből következik, hogy $DMHN$ paralelogramma.
II. megoldás.
Mivel $MP \perp PN$ és $PN \perp ND$ következik, hogy $HM \parallel DN$.
Mivel $NQ \perp BM$ és $BM \perp AD$ következik, hogy $HN \parallel DM$.
Tehát a $HNDM$ paralelogramma.

Jegyezd meg!

- Azt a szakaszt, amely összeköti egy háromszög két oldalának felezőpontját, a háromszög **középvonalának** nevezzük.
- Egy háromszög két oldalának felezőpontja által meghatározott középvonal párhuzamos a harmadik oldallal és hossza egyenlő ezen oldal hosszának felével.
- Egy háromszög oldalfelezői a G pontban metszik egymást. Ez a metszéspont mindegyik oldalfelezőn kétharmad részre van a csúcstól és egyharmad részre a szemben fekvő oldal felezőpontjától. A G pont a *háromszög súlypontja*.
- Egy háromszög magasságvonalai a H pontban metszik egymást, amit a *háromszög ortocentrumának* vagy *magasságpontjának* nevezünk.

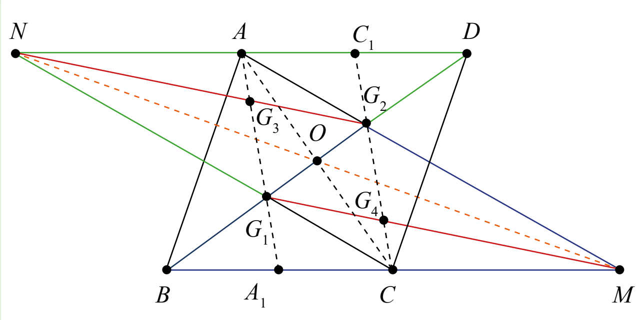
Feladat a portfólióba

I. a) Egy megfelelő méretű papírlap és mértani eszközök felhasználásával készítsétek el a következő mértani alakzatot, követve az alábbi utasításokat.

1) Rajzoljatok egy $ABCD$ paralelogrammát, aminek O a középpontja.
2) Határozzátok meg az ABC és ADC háromszögek súlypontját! Jelöljétek ezeket G_1-gyel, illetve G_2-vel.
3) Rajzoljátok meg az AM és AN szakaszokat, ahol $\{M\} = AG_2 \cap BC$ és $\{N\} = CG_1 \cap AD$.
4) Határozzátok meg a DNG_1 és BMG_2 háromszögek súlypontját. Jelöljétek ezeket G_3-mal illetve G_4-gyel!
5) Húzzátok meg az NG_2 és MG_1 szakaszokat! Húzzátok meg pontozott vonallal az MN szakaszt.
6) Bizonyítsátok be, hogy az $AMCN$ négyszög paralelogramma, melynek középpontja közös az $ABCD$ paralelogrammáéval!
7) Igazoljátok, hogy $G_1G_2G_3G_4$ paralelogramma, melynek O a középpontja!
8) Soroljátok fel az elkészített rajzon lévő összes paralelogrammát!

b) Felhasználva az elkészített rajzot, oldjátok meg a 6), 7) és 8) feladatokat. Mindegyik lépésnél fejtsétek ki a gondolatmenetet!

II. Bizonyítsátok be, hogy egy háromszög súlypontja megegyezik a csúcsainak a szemben fekvő oldalak felezőpontja szerinti szimmetrikusaik által meghatározott háromszög súlypontjával!



Ismeretfelmérő

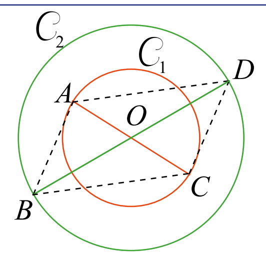
Hivatalból 10 pont jár.

I. *Az alábbiak közül válasszuk ki azt a betűt, amely a helyes választ jelöli; csak egyetlen válasz helyes.*

5p	**1.** Az $ABCD$ négyszög A és B szöge pótszög, és $C\sphericalangle = 100°$. A D szög mértéke egyenlő: A. 100° B. 90° C. 80° D. 180°
5p	**2.** Az $EFGH$ konvex négyszögben, $EG \cap FH = \{O\}$, EO az EFH háromszög oldalfelezője, FO az EFG háromszög oldalfelezője. Egy párhuzamos egyenespár: A. EO és GF B. FO és HG C. GO és HE D. EF és HG
5p	**3.** Az $MNPQ$ négyszögben $MN = MQ$ és $PN = PQ$. Az MP és NQ egyenesek által bezárt szög mértéke egyenlő: A. 90° B. 80° C. 120° D. 100°
5p	**4.** Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 54 cm, és $AB = 0{,}8 \cdot BC$. A CD oldal hossza: A. 15 cm B. 12 cm C. 13 cm D. 14 cm
5p	**5.** A DEF háromszög egyenlő szárú, $D\sphericalangle = 30°$, $DE = DF$. Az F ponton átmenő, DE egyenessel párhuzamos egyenes metszi a D ponton átmenő, EF egyenessel párhuzamos egyenest a P pontban. A DPF szög mértéke egyenlő: A. 70° B. 80° C. 75° D. 85°
5p	**6.** Legyen $LMNP$ négyszög, melyben $LMP\sphericalangle \equiv MPN\sphericalangle$. Az $LMN\sphericalangle + MNP\sphericalangle$ mértéke: A. 90° B. 120° C. 150° D. 180°
5p	**7.** Az $ABCD$ paralelogrammában AE és BE félegyenesek a $DAB\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ szögfelezői. Az $AEB\sphericalangle$ mértéke egyenlő: A. 60° B. 90° C. 30° D. 120°
5p	**8.** Az $ABCD$ paralelogrammában $AC = 20$ dm, $BD = 16$ dm, $BC = 6$ dm és $AC \cap BD = \{O\}$. Az ADO háromszög kerülete egyenlő: A. 30 cm B. 20 cm C. 24 cm D. 18 cm

II. *Az alábbi feladatok teljes megoldását irjátok le!*

 5p 5p	**1.** A mellékelt ábrán az AC szakasz a $\mathcal{C}_1$ kör átmérője és a BD szakasz a $\mathcal{C}_2$. kör átmérője. A két körnek azonos középpontja van, ez az O pont. Igazold, hogy: a) $AB \parallel CD$; b) $ABC\sphericalangle \equiv ADC\sphericalangle$.
10p	**2.** A $BCDE$ paralelogrammában $BC = 2 \cdot CD$ és M a DE oldal felezőpontja. Számítsd ki a BMC szög mértékét.
15p	**3.** Az ABC háromszög AB és AC oldalait meghosszabbítjuk a BD illetve CE szakaszokkal úgy, hogy $BD = CE = BC$. Az $ABC\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögfelezői metszik egymást az I pontban, illetve a BE és CD egyenesek metszik egymást az L pontban. Bizonyítsd be, hogy $BLCI$ paralelogramma!
 5p 5p 5p	**4.** Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = 4$ cm, $AB \perp BD$ és $\sphericalangle BAD = 2\sphericalangle ADB$. Az E pont a B pont D szerinti szimmetrikusa és $EA \cap BC = \{F\}$. a) Határozd meg a paralelogramma szögeinek mértékét. b) Számítsd ki a paralelogramma kerületét. c) Számítsd ki a CE és CF szakaszok hosszát!



4.3. Sajátos paralelogrammák: téglalap, rombusz, négyzet

1.ℓ. A téglalap. Tulajdonságok

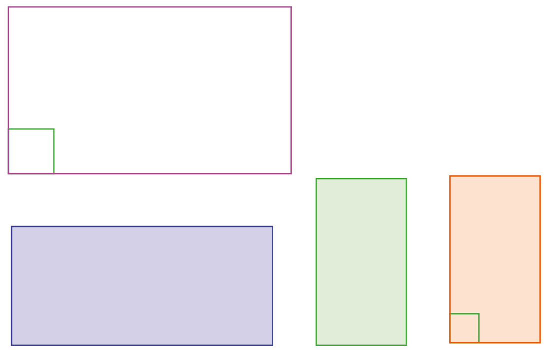
Emlékeztető

- Az $ABCD$ négyszög paralelogramma akkor és csakis akkor, ha $A\sphericalangle \equiv C\sphericalangle$ és $B\sphericalangle \equiv D\sphericalangle$.
- Az $ABCD$ négyszög paralelogramma akkor és csakis akkor, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:
  1) $A\sphericalangle + B\sphericalangle = 180°$ és $B\sphericalangle + C\sphericalangle = 180°$; 2) $B\sphericalangle + C\sphericalangle = 180°$ és $C\sphericalangle + D\sphericalangle = 180°$;
  3) $C\sphericalangle + D\sphericalangle = 180°$ és $D\sphericalangle + A\sphericalangle = 180°$; 4) $D\sphericalangle + A\sphericalangle = 180°$ és $A\sphericalangle + B\sphericalangle = 180°$.

Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés. Azt a paralelogrammát, amelynek egyik szöge derékszög, **téglalapnak** nevezzük.

Azon pontok halmazát, amelyek egy téglalap belsejében vagy valamelyik oldalán helyezkednek el, **téglalap alakú négyszöglapnak** nevezzük.

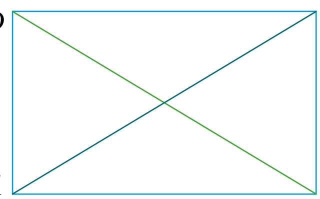


A gyakorlatban nagyon sokszor találkozunk téglalapokkal és téglalap alakú négyszöglapokkal: egy könyv vagy füzet lapja, íróasztal, számítógép vagy mobiltelefon képernyője stb., tehát elég sok okunk van arra, hogy részletesebben tanulmányozzuk ezt a mértani alakzatot.
A téglalap egy paralelogramma, tehát érvényes rá *a paralelogramma összes tulajdonsága*. Hozzáteszünk néhány sajátos tulajdonságot.

1. tétel. Egy téglalap minden szöge derékszög.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy paralelogrammában a szemben fekvő szögek kongruensek, illetve az egymás melletti szögek kiegészítő szögek. Ha az egyik szög derékszög, akkor a szemben fekvő szöge is derékszög, és mivel az egymás melletti szögek kiegészítő szögek, ezek is derékszögek. Következtetésképpen mind a négy szög *derékszög*, tehát az összes szög *kongruens*.

2. tétel. A téglalap átlói kongruensek.



Bizonyítás. Ha $ABCD$ a téglalap, $DAB\Delta$ és $CBA\Delta$ derékszögű háromszögek, amelyekben $AD \equiv BC$ és AB közös oldal, így a B.B. kongruencia esetből következik, hogy a háromszögek kongruensek. Tehát $AC \equiv BD$, vagyis az átlók kongruensek.

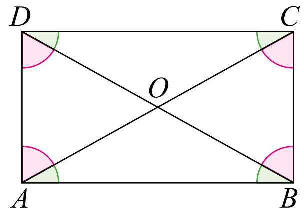
3. tétel. Ha egy paralelogramma átlói kongruensek, akkor a paralelogramma téglalap.

Bizonyítás: Az $ABCD$ paralelogramma átlói kongruensek, $AC \equiv BD$. Ahhoz, hogy kimutassuk, hogy ez egy téglalap, be kell bizonyítanunk, hogy az egyik szöge derékszög. Ebből kiindulva tanulmányozunk két olyan háromszöget, melyek tartalmazzák a paralelogramma átlóit. A $DAB\Delta$ és $CBA\Delta$ háromszögekben: $AC \equiv BD$, $AD \equiv BC$ és AB közös oldal. Az O.O.O. kongruencia esetből következik, hogy $DAB\Delta \equiv CBA\Delta$, így $DAB\sphericalangle \equiv CBA\sphericalangle$. Ezek a paralelogrammában egymás melletti szögek, tehát kiegészítő szögek. Mivel ezek kongruensek is, következik, hogy derékszögek, tehát a paralelogramma téglalap.

Alkalmazás

Említést kell tennünk az alábbi tulajdonságokról is:

1) A téglalap átlói két szemben fekvő oldallal 4 kongruens szöget alkotnak.
Bizonyítás. Figyeljük meg az AC és BD átlók az AB és CD oldalakkal alkotott szögeit. Az $ABD\Delta$, $BAC\Delta$, $CDB\Delta$, $DCA\Delta$ kongruens derékszögű háromszögek, a B.B. kongruencia eset alapján, így $ABD\sphericalangle \equiv BAC\sphericalangle \equiv CDB\sphericalangle \equiv DCA\sphericalangle$.
Hasonlóan következik, hogy az AC és BD átlók az AD és BC oldalakkal alkotott szögei kongruensek: $CBD\sphericalangle \equiv BCA\sphericalangle \equiv DAC\sphericalangle \equiv ADB\sphericalangle$.



2) A téglalap átlói az oldalakkal két kongruens, egyenlő szárú háromszögpárt alkotnak.
Bizonyítás: Legyen $ABCD$ téglalap. A téglalap átlói kongruensek és felezik egymást, vagyis $AC \equiv BD$ és $AO \equiv BO \equiv CO \equiv DO$, ahol az O pont az átlók metszéspontja.
Az $AO \equiv CO$, $BO \equiv DO$ és $AOB\sphericalangle \equiv COD\sphericalangle$, következik, hogy $AOB\Delta \equiv COD\Delta$.
Az $AO \equiv CO$, $DO \equiv BO$ és $AOD\sphericalangle \equiv BOC\sphericalangle$, következik, hogy $AOD\Delta \equiv COB\Delta$.
Mivel $AO \equiv BO \equiv CO \equiv DO$, következik, hogy mind a négy háromszög egyenlő szárú.

A kapott eredmények alapján kétféle módszerrel bizonyíthatjuk, hogy egy négyszög téglalap:
1) A meghatározás alapján: a téglalap egy olyan paralelogramma, amelynek egyik szöge derékszög.
2) 3. tétel alapján: a téglalap egy olyan paralelogramma, amelynek *átlói kongruensek*.
A következő alkalmazással egy újabb módszert kapunk, amivel megmutathatjuk, hogy egy alakzat téglalap.

Alkalmazás. Ha egy konvex négyszög minden szöge kongruens, akkor az téglalap.
Bizonyítás. Egy konvex négyszög szögei mértékének összege 360°. Mivel a négyszög minden szöge kongruens, és az összegük 360°, következik, hogy mindegyik szög 90°. A négyszög mindegyik szöge derékszög, így bármelyik egymás melletti szöge kiegészítő szög. A négyszög paralelogramma, amelyben az egyik szög derékszög, következik, hogy a négyszög téglalap.

Jegyezd meg!

- Azt a paralelogrammát, amelynek egyik szöge derékszög, téglalapnak nevezzük.
- A téglalap minden szöge derékszög.
- Egy paralelogramma akkor és csakis akkor téglalap, ha az átlói kongruensek.
- Ha egy négyszögnek három szöge derékszög, akkor az téglalap.

Gyakorlatok és feladatok

1. Szerkeszd meg az $ABCD$ téglalapot, amelyben:
a) $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm;
b) $AB = 8$ cm, $BD = 10$ cm;
c) $AC = 12$ cm és $ACB\sphericalangle = 30°$.

2. Bizonyítsd be, hogy egy négyszög, amelynek három szöge derékszög, téglalap.

3. Bizonyítsd be, hogy téglalap az a négyszög, melyben bármelyik szög mértéke egyenlő a másik három szög mértékének számtani közepével!

4. Az $ABCD$ téglalapban $AC \cap BD = \{O\}$, $AOD\sphericalangle = 60°$ és $AC = 24{,}8$ cm.
Számítsátok ki a BOC háromszög kerületét!

5. Az $MNPQ$ téglalap átlói metszik egymást az O pontban.
a) Ha $MOQ\sphericalangle = 72^\circ$, számítsd ki az $MQN\sphericalangle$ és $MPQ\sphericalangle$ mértékét.
b) Ha $MQO\sphericalangle = 26^\circ$, számítsd ki az $MOQ\sphericalangle$ és $MPN\sphericalangle$ mértékét.

6. Az OM és ON az $AOB\sphericalangle$ és $BOC\sphericalangle$ egymás melletti kiegészítő szögek szögfelezői. Legyen $BD \perp OM$, $D \in OM$ és $BE \perp ON$, $E \in ON$.
Bizonyítsd be, hogy:
a) $BDOE$ téglalap;
b) $OB \equiv DE$.

7. Legyen AD az ABC háromszög magassága, ahol $D \in BC$. Legyen E és F a D pont szimmetrikusa az AB illetve AC oldalak felezőpontjára nézve. Bizonyítsd be, hogy $BCFE$ és $ADBE$ téglalapok!

8. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm. Az E és F pont az AB oldalon helyezkedik el úgy, hogy $AE = EF = FB$. M a BC szakasz felezőpontja, és N a CD oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DN = 2\ CN$. Bizonyítsd be, hogy:
a) $BCNF$ téglalap;
b) $DF \perp FM$;
c) ha P az M pont szimmetrikusa az N pontra nézve, akkor $DFMP$ téglalap.

9. Az $MNPQ$ téglalap átlói az O pontban metszik egymást, $ONP\sphericalangle = 30^\circ$ és $MP = 20$ cm.
Számítsd ki:
a) az MON szög mértékét;
b) az MN szakasz hosszát.

10. Az ACD egyenlő szárú háromszögben AB a CD alaphoz tartozó magasság. Ha E a C pont szimmetrikusa az AB oldal felezőpontjára nézve, bizonyítsd be, hogy $ABDE$ téglalap.

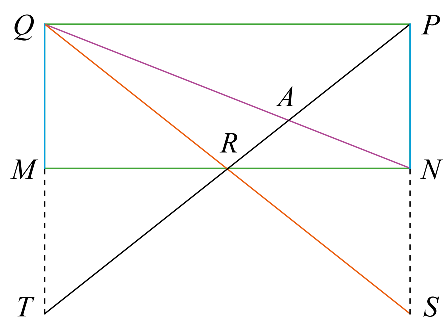
11. Az A, B, C, D, E ebben a sorrendben kollineáris pontok, és $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE$. Az M és N pontok szimmetrikusan helyezkednek el a C pontra nézve, $M \notin AB$ és $AE = 2\ MN$.
Bizonyítsd be, hogy:
a) $AMEN$ paralelogramma;
b) $BMDN$ téglalap.

12. Adott az ABC háromszög, amelyben a D pont a BC oldalon helyezkedik el. A D ponton át az AB-hez húzott párhuzamos az AC egyenest az E pontban, illetve a D ponton át az AC-hez húzott párhuzamos az AB egyenest az F pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AEDF$ téglalap, akkor és csakis akkor, ha $BAC\sphericalangle = 90°$.

13. Az O középpontú és $AO = r$ sugarú kör átmérője AB. Az AO szakasz felezőmerőlegese a C és D pontokban, illetve a BO szakasz felezőmerőlegese az E és F pontokban metszi a kört. Bizonyítsd be, hogy a C, D, E, F pontok egy téglalap csúcsai!

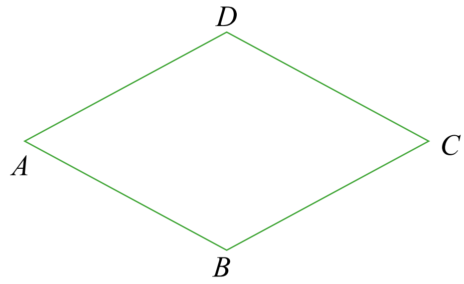
14. Adott az $ABCD$ téglalap, amelyben a P pont az AB oldalon helyezkedik el úgy, hogy $CP = AB$ és $APD\sphericalangle = 5 \cdot (ADP\sphericalangle)$. Számítsd ki a CDP háromszög szögeinek mértékét!

15. Adott az $MNPQ$ téglalap, S a P pont szimmetrikusa az N pontra nézve, $QS \cap MN = \{R\}$ és $PR \cap MQ = \{T\}$.
a) Bizonyítsd be, hogy $TS \equiv MN$.
b) Ha $PR \cap QN = \{A\}$, mutasd ki, hogy $AT = 2 \cdot PA$.



2.ℓ. Rombusz. Tulajdonságok

Fedezzük fel, értsük meg!

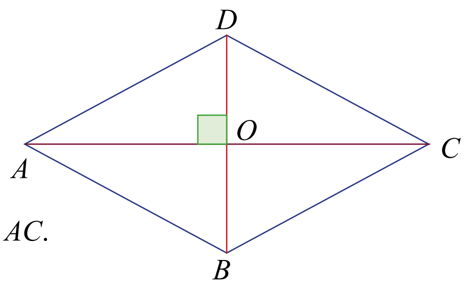


Értelmezés. Azt a paralelogrammát, amelynek két szomszédos oldala kongruens, **rombusznak** nevezzük.

A rombusz egy paralelogramma, következtetésképpen a paralelogramma *minden tulajdonsága* igaz rá. Ezeket kiegészítjük néhány sajátos tulajdonsággal.

1. tétel. Egy rombusz minden oldala kongruens.

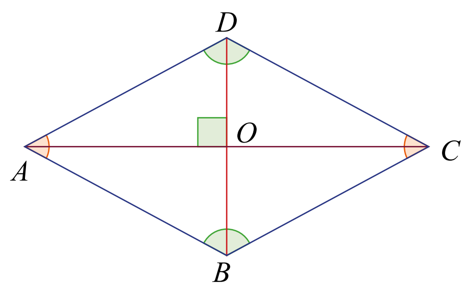
Bizonyítás. Az $ABCD$ rombusz egyben paralelogramma, a szemben fekvő oldalai kongruensek, tehát $AB \equiv CD$ és $AD \equiv BC$. A kiegészítő feltétel miatt $AB \equiv BC$, tehát $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$.
Következik, hogy a rombusznak mind a négy oldala kongruens.



2. tétel. A rombusz átlói merőlegesek egymásra.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az $ABCD$ rombuszt, ahol $AC \cap BD = \{O\}$.
Az átlói felezik egymást, tehát $OA \equiv OC$.
Az ABC egyenlő szárú háromszögben BO az AC alaphoz tartozó oldalfelező, tehát magasság is. Következik, hogy $BO \perp AC$, tehát $BD \perp AC$.

3. tétel. Egy rombusz átlói a szögeinek szögfelezői.



Bizonyítás. Tekintsük az $ABCD$ rombuszt, ahol $AC \cap BD = \{O\}$.
Az ABD egyenlő szárú háromszög, az AC egyenes tartalmazza a BD alaphoz tartozó AO oldalfelezőt. Akkor AC tartalmazza a $BAD\sphericalangle$ szögfelezőjét is, vagyis $BAC\sphericalangle \equiv DAC\sphericalangle$.
Másrészt $BAC\sphericalangle \equiv ACD\sphericalangle$ és $DAC\sphericalangle \equiv ACB\sphericalangle$ (belső váltószögek).
A három kongruenciából kapjuk, hogy $ACB\sphericalangle \equiv ACD\sphericalangle$, vagyis az AC egyenes tartalmazza a $BCD\sphericalangle$ szögfelezőjét is. Hasonlóan bizonyítható, hogy BD egyenes tartalmazza az $ABC\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ szögfelezőjét.

Alkalmazás

Elégséges feltételek, amelyek alapján egy négyszög rombusz.

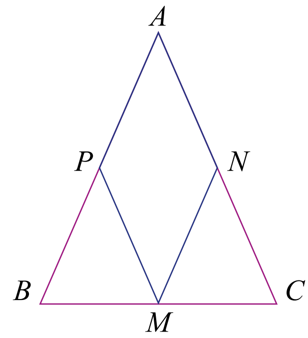
F_1: Ha egy négyszög minden oldala kongruens, akkor az rombusz.
F_2: Ha egy paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, akkor az rombusz.
F_3: Ha egy paralelogramma egyik átlója az egyik szög szögfelezője, akkor az a paralelogramma rombusz.

Olyan módszereket azonosítottunk amelyekkel ki tudjuk mutatni, hogy egy mértani alakzat rombusz:
1) Meghatározás: A rombusz olyan paralelogramma, melynek két szomszédos oldala kongruens.
2) F_1 elégséges feltétel (az oldalak hosszára vonatkozik).
3) F_2 és F_3 elégséges feltétel (az átlókra vonatkozik).

Feladat a portfólióba

Miután megértettétek az 1., 2. és 3. tétel bizonyításának gondolatmenetét, bizonyítsátok be az F_1, F_2 és F_3 elégséges feltételeket egy osztálytársatokkal együtt!

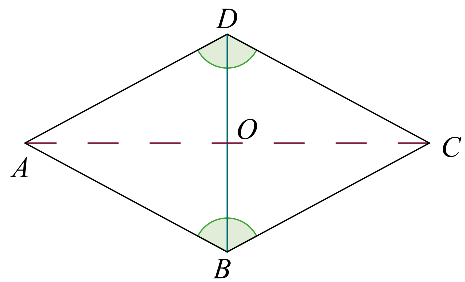
1. alkalmazás. Az ABC egyelő szárú háromszögben $AB \equiv AC$ és M, N, P az oldalak felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy az A, M, N, P csúcsokkal rendelkező négyszög rombusz.



Megoldás: Legyen M a BC oldal felezőpontja, N az AC oldal felezőpontja, P az AB oldal felezőpontja. Ekkor $AP = \dfrac{AB}{2}$ és $AN = \dfrac{AC}{2}$. Az MN és MP szakaszok az $ABC\Delta$ középvonalai, tehát $MN = \dfrac{AB}{2}$ és $MP = \dfrac{AC}{2}$.

Mivel $AB \equiv AC$, következik, hogy $PA = MP = MN = AN$.
Az F_1 feltétel alapján, az $ANMP$ négyszög rombusz.

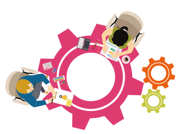
2. alkalmazás. Az $ABCD$ konvex négyszögben a BD átló a $B\sphericalangle$ és $D\sphericalangle$ szögfelezője, illetve AC a BD szakasz felezőmerőlegese. Bizonyítsátok be, hogy $ABCD$ rombusz.



Megoldás. A BD átló a $B\sphericalangle$ és $D\sphericalangle$ szögfelezője. Hajlamosak vagyunk az F_3 feltételre gondolni. Észrevesszük, hogy nem tudjuk az $ABCD$ négyszögről, hogy paralelogramma-e. Kongruens elemeket keresünk.
A BD átló a $B\sphericalangle$ és $D\sphericalangle$ szögfelezője, tehát $ABD\sphericalangle \equiv CBD\sphericalangle$ és $ADB\sphericalangle \equiv CDB\sphericalangle$, illetve AB közös oldal. A SZ.O.SZ. kongruenciaesetből kapjuk, hogy $ABD\Delta \equiv CBD\Delta$. Következik, hogy $AB \equiv BC$ és $AD \equiv DC$. Másrészt AC a BD szakasz felezőmerőlegese, így $AB \equiv AD$ és $CB \equiv$ $\equiv CD$, tehát $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$, vagyis $ABCD$ rombusz.

Jegyezd meg!

- Azt a paralelogrammát, melynek két szomszédos oldala kongruens, rombusznak nevezzük.
- Egy négyszög akkor és csakis akkor rombusz, ha minden oldala kongruens.
- Egy négyszög akkor és csakis akkor rombusz, ha az átlói merőlegesek egymásra.
- Egy négyszög akkor és csakis akkor rombusz, ha egyik átlója az egyik szög szögfelezője.



Gyakorlatok és feladatok

1. a) Szerkesszetek egy $ABCD$ rombuszt, amelynek oldala 6 cm.
b) Szerkesszetek egy $EFGH$ rombuszt, amelyben $EG = 2$ cm és $FH = 5$ cm.

2. Andrea és Csaba a következő párbeszédet folytatja a négyszöggel kapcsolatosan:
Andrea: Bármely rombusz oldalainak felezőpontjai egy téglalap csúcsai.
Csaba: Bármely téglalap oldalainak felezőpontjai egy rombusz csúcsai.
Kinek van igaza? Indokoljátok a választ!

3. Az $ABCD$ paralelogrammában $ADB\sphericalangle = 56°$ és $ACB\sphericalangle = 34°$.
Igazoljátok, hogy $ABCD$ rombusz.

4. Az $ABCD$ rombusz, és a C ponton keresztül a BD egyeneshez húzott párhuzamos metszi az AB egyenest az M pontban, illetve az AD egyenest az N pontban. Bizonyítsátok be, hogy $MN = 2 \cdot BD$. Ellenőrizzétek, hogy az eredmény fennáll-e, ha az $ABCD$ paralelogramma és nem rombusz.

5. Az $MNPQ$ paralelogramma, és az M pont egyenlő távolságra van az NP, illetve PQ egyenesektől. Mutassátok ki, hogy $MNPQ$ rombusz.

6. $CDEF$ rombusz, $CE \cap DF = \{O\}$, $CO = 2{,}5$ cm, és $EF = 5$ cm.
a) Határozzátok meg a rombusz szögeinek mértékét.
b) Számítsátok ki a CEF és CFD szögek mértékét.

7. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = BD = 10$ cm, E az AD oldal felezőpontja és $BE \cap CD = \{F\}$.
a) Igazoljátok, hogy $DC \equiv DF$.
b) Számítsátok ki az AF szakasz hosszát.

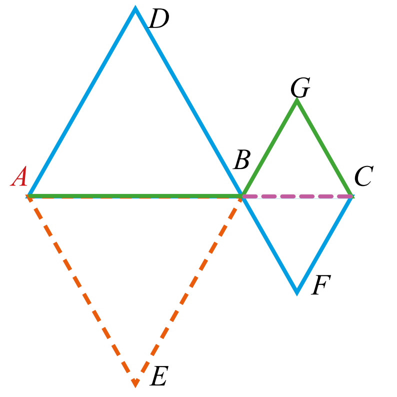
8. Az $LMNP$ rombusz LM oldalán legyen Q egy pont úgy, hogy $PQ \perp LM$. Tudva, hogy $LM = 16$ cm és $PQ = 8$ cm, határozzátok meg a rombusz szögeinek mértékét.

9. Az $ABCD$ téglalapnak O a középpontja. A C ponton át a BD-hez húzott párhuzamos metszi a D ponton át az AC-hez húzott párhuzamost az E pontban. Igazoljátok, hogy $CD \perp OE$.

10. Ha M egy pont az $ABCD$ rombusz egyik átlóján, határozzátok meg a következő kijelentés igazságértékét:
$AMB\sphericalangle + CMD\sphericalangle = 180°$.

11. Az ABC háromszögben $B\sphericalangle = 90°$, az A szög szögfelezője metszi a BC egyenest a D pontban, illetve a C ponton át az AC oldalra húzott merőlegest az E pontban. Legyen $EF \parallel BC$, $F \in AB$.
a) Mutassátok ki, hogy a $CDE\Delta$ egyenlő szárú.
b) Igazoljátok, hogy $CDFE$ rombusz

12. Az alábbi ábrán egy óváros alaprajza látható. A szakaszok az utcákat, a pontok pedig a turisztikai látnivalókat jelölik. Mátyás az A pontból indul és a D, B, F, C látnivalókat látogatja meg, ebben a sorrendben. Bíborka ugyanabból a pontból indul, és meglátogatja a B, G, C nevezetességeket. Az A, B, C pontok kollineárisak, $AB = 2 \cdot BC = 1{,}2$ km, $DAE\sphericalangle = FCG\sphericalangle = 120°$, és az $ADBE$ és $BFCG$ négyszögek rombuszok.



a) Számítsátok ki a Mátyás és Bíborka által megtett távot.
b) Határozzátok meg a legrövidebb útvonalat, amellyel Mátyás meglátogathatja az alaprajzon lévő összes nevezetességet.

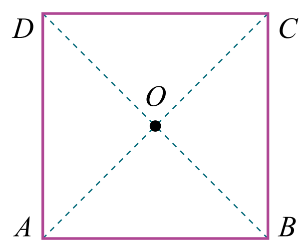
3.*l.* Négyzet. Tulajdonságok

Emlékeztető

Az előző leckékben a paralelogrammából kiindulva, egy-egy feltétellel kiegészítve a következő mértani alakzatokat kaptuk:
1) *téglalap* – ha a szögek kongruensek;
2) *rombusz* – ha az oldalak kongruensek.

Fedezzük fel, értsük meg!

Feltevődik a kérdés, hogy milyen mértani alakzatot kapunk, ha mindkét feltétel egyszerre teljesül. Megrajzolunk egy ilyen négyszöget és azonnal észrevesszük: ez a legismertebb konvex négyszög, azaz a **négyzet**.



Értelmezés. Azt a konvex négyszöget, amely téglalap is, rombusz is, *négyzetnek* nevezzük.
Azon pontok halmazát, amelyek egy négyzet belsejében vagy valamelyik oldalán helyezkednek el, a **négyzetlapnak** nevezzük.

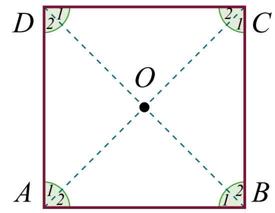
A meghatározás alapján a négyzet rendelkezik a téglalap és a rombusz összes tulajdonságával.
Szeretnénk meghatározni néhány sajátos tulajdonságot. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet, ahol $AC \cap BD = \{O\}$.

Tulajdonság

T_1: A négyzet minden oldala illetve minden szöge kongruens (derékszögek).

Bizonyítás:

T_1: *ABCD* négyzet, következik, hogy *ABCD* rombusz és téglalap. Mivel *ABCD* rombusz, tudjuk, hogy $AB \equiv BC \equiv CD \equiv AD$ (minden oldala kongruens), illetve *ABCD* téglalap, tehát $A\sphericalangle \equiv B\sphericalangle \equiv C\sphericalangle \equiv D\sphericalangle$ (minden szöge kongruens).



T_2: A négyzet átlói kongruensek és merőlegesek egymásra.

T_2: *ABCD* négyzet, következik, hogy *ABCD* rombusz és téglalap. Mivel *ABCD* téglalap, ezért az átlók kongruensek, $AC \equiv BD$, illetve *ABCD* rombusz, amiből következik, hogy az átlók merőlegesek egymásra, $AC \perp BD$.

T_3: A négyzet átlói a szögeinek szögfelezői.

T_3: Ha *ABCD* négyzet, következik, hogy *ABCD* rombusz, így az átlók szögfelezők: $A_1\sphericalangle \equiv A_2\sphericalangle$ és $C_1\sphericalangle \equiv C_2\sphericalangle$, $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$ és $D_1\sphericalangle \equiv D_2\sphericalangle$.

Megjegyzés. A négyzet átlói az oldalakkal 45°-os szöget zárnak be.

T_4: A négyzet átlói felezik egymást és négy kongruens szakaszt határoznak meg.

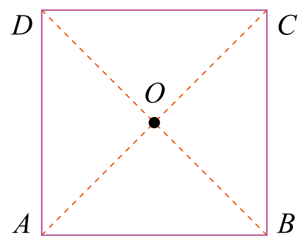
T_4: Ha *ABCD* négyzet, következik, hogy *ABCD* paralelogramma, és átlói felezik egymást: $OA = OC$ és $OB = OD$. A T_2 tulajdonság alapján következik, hogy $OA = OB = OC = OD$.

A fentiekből következtetünk azokra az elégséges feltételekre, amelyek alapján egy konvex négyszög négyzet.

F_1: Ha egy négyszög téglalap és rombusz is, akkor az négyzet.
F_2: Ha egy rombusz egyik szöge derékszög, akkor az négyzet.
F_3: Ha egy rombusz átlói kongruensek, akkor az négyzet.
F_4: Ha egy téglalap átlói merőlegesek, akkor az négyzet.
F_5: Ha egy téglalap két szomszédos oldala kongruens, akkor az négyzet.
F_6: Ha egy paralelogramma két szomszédos oldala és két szomszédos szöge kongruens, akkor az négyzet.
F_7: Ha egy paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, és kongruensek, akkor az négyzet.
F_8: Ha egy téglalap egyik átlója az egyik szögének szögfelezője, akkor az négyzet.

Alkalmazás

1. alkalmazás. Bizonyítsátok be az F_7-et: ha egy paralelogramma átlói kongruensek, és merőlegesek egymásra, akkor az négyzet.
Bizonyítás. Vizsgáljuk az *ABCD* paralelogrammát! Mivel $AC \equiv BD$, következik, hogy *ABCD* téglalap. Mivel $AC \perp BD$, következik, hogy *ABCD* rombusz. Tehát *ABCD* téglalap is, rombusz is, vagyis négyzet.



Feladat a portfólióba

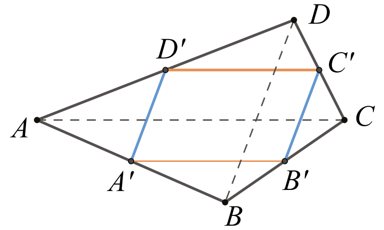
Bizonyítsatok be **két másik** elégséges feltételt egy osztálytársatokkal együtt.

2. alkalmazás. Az *ABCD* paralelogrammában jelöljük az *AB*, *BC*, *CD* és *DA* szakaszok felezőpontjait *A'*, *B'*, *C'* illetve *D'*-tel.

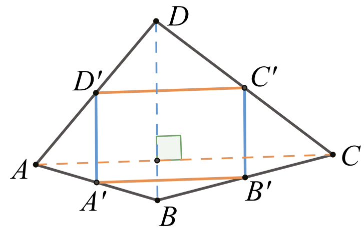
1) Bizonyítsátok be, hogy az *A'B'C'D'* paralelogramma!
2) Keressetek olyan feltételeket, amelyeket az *ABCD* kell teljesítsen ahhoz, hogy *A'B'C'D'*:
   a) téglalap legyen; b) rombusz legyen; c) négyzet legyen.

Bizonyítás.

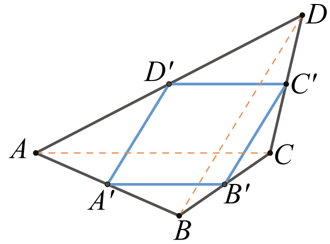
1) Az $A'B'C'D'$ négyszög oldalai összekötik az AB, BC, CD és AD oldalak felezőpontjait, ezért a középvonalakat juttatják eszünkbe. Megrajzoljuk az AC és BD átlókat. Az $ADB\Delta$-ben az $A'D'$ középvonal párhuzamos BD-vel és egyenlő a BD hosszának felével. Az $CDB\Delta$-ben a $B'C'$ középvonal párhuzamos BD-vel és egyenlő a BD hosszának felével. Tehát, az $A'B'C'D'$ négyszögben két szemben fekvő oldal párhuzamos és kongruens. Ebből következik, hogy $A'B'C'D'$ paralelogramma.



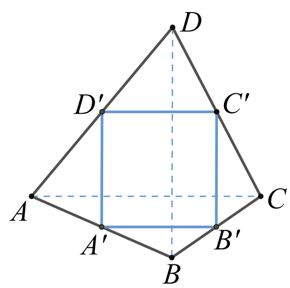
2) a) Ahhoz, hogy $A'B'C'D'$ téglalap legyen, paralelogramma kell legyen (amit már bizonyítottunk), és a szomszédos oldalak merőlegesek kell legyenek egymásra. Mivel az $A'B'C'D'$ négyszög oldalai párhuzamosak az $ABCD$ négyszög átlóival, teljesül az a feltétel is, hogy ezek merőlegesek egymásra. Következtetésképpen, ahhoz, hogy $A'B'C'D'$ téglalap legyen, szükséges és elégséges, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek legyenek egymásra.



b) Ahhoz, hogy $A'B'C'D'$ rombusz legyen, paralelogramma kell legyen (ez teljesül), és a szomszédos oldalak kongruensek kell legyenek.
Mivel $A'B' = C'D' = \dfrac{AC}{2}$ és $B'C' = A'D' = \dfrac{BD}{2}$, következik, hogy $A'B'C'D'$ akkor rombusz, ha $AC \equiv BD$, vagyis ha az $ABCD$ négyszög átlói kongruensek.



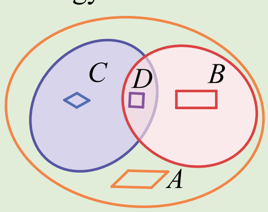
c) Mivel a négyzet egyidejűleg téglalap is, rombusz is, elegendő, ha a b) és c) alpontokban lévő feltételek teljesülnek. Így következik, hogy $A'B'C'D'$ akkor négyzet, ha $AC \perp BD$ és $AC \equiv BD$, vagyis az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra és kongruensek.



Tudtátok, hogy...?
Azt a négyszöget, melynek átlói merőlegesek egymásra, *ortodiagonális négyszögnek* nevezzük.

Jegyezd meg!

1) Minden négyzet paralelogramma.
2) Minden négyzet téglalap.
3) Minden négyzet rombusz.



Tekintsük a következő halmazokat:
A = a síkbeli paralelogrammák halmaza;
B = a síkbeli téglalapok halmaza;
C = a síkbeli rombuszok halmaza;
D = a síkbeli négyzetek halmaza.
Akkor:
a) $D \subset C, D \subset B, D \subset A$;
b) $C \subset A, B \subset A$;
c) $B \cap C = D$ és $A \cap B \cap C = D$.

Gyakorlatok és feladatok

1. a) Beosztásos vonalzó és körző segítségével szerkesszetek egy 4 cm oldalhosszúságú négyzetet.
b) Beosztásos vonalzó és szögmérő segítségével szerkesszetek egy 0,6 dm oldalhosszúságú négyzetet.

2. a) Szerkesszetek egy 48 cm kerületű négyzetet.
b) Szerkesszetek egy 80 mm átlójú négyzetet.

3. Az ABC és DBC egyenlő szárú derékszögű háromszögeknek a BC közös átfogója. Igazoljátok, hogy $ABDC$ négyzet.

4. Bizonyítsátok be, hogy egy négyzet oldalainak felezőpontjai egy másik négyzet csúcsai lesznek.

5. Az $ABCD$ négyzetben az átlók metszik egymást az O pontban. Mutassátok ki, hogy az AO, BO, CO és DO oldalak felezőpontjai egy négyzet csúcsai.

6. Az $ABCD$ rombuszban az A és C szögek kiegészítő szögek. Igazold, hogy $ABCD$ négyzet.

7. Az $ABCD$ téglalap AC átlóján legyen P egy pont úgy, hogy $PB = PD$, $P \notin BD$. Bizonyítsátok be, hogy $ABCD$ négyzet.

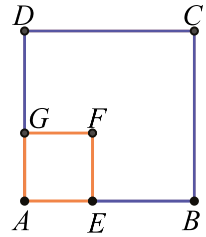
8. Bizonyítsátok be, hogy ha egy téglalap egyik oldalának hossza számtani középarányosa a másik három oldal hosszának, akkor ez a téglalap négyzet.

9. Az $ABCD$ négyzetben a $BAC\sphericalangle$ és $CAD\sphericalangle$ szögfelezői metszik a BC és CD oldalakat az E illetve F pontban.
a) Számítsátok ki az AEF háromszög szögeinek mértékét.
b) Mutassátok ki, hogy $EF \parallel BD$.

10. Az $ABCD$ téglalap külső tartományában megszerkesztjük az ABE és CDF egyenlő szárú derékszögű háromszögeket, ahol $AE = BE$, $CF = DF$. Legyen $AE \cap DF = \{M\}$ és $BE \cap CF = \{N\}$.
a) Bizonyítsátok be, hogy $MENF$ négyzet.
b) Igazoljátok, hogy AC, EF és MN összefutó egyenesek.

11. Az A pont a BC szakasz egyik belső pontja; a BC egyenes egyik és másik oldalán megszerkesztjük az $ABDE$ illetve $ACFG$ négyzeteket.
a) Mutassátok ki, hogy $BG \equiv CE$;
b) Számítsátok ki az $\dfrac{AB}{AC}$, arány értékét, ha $BG \parallel CE$.

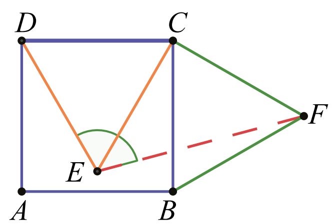
12. Az ábrán $ABCD$ és $AEFG$ négyzetek. Bizonyítsátok be, hogy:
a) A, F, C kollineáris pontok;
b) GE és BD párhuzamos egyenesek.



13. Az A pont a BC szakasz belső pontja; a BC egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük az $ABDE$ illetve $ACFG$ négyzeteket.
a) Igazoljátok, hogy $BE \parallel AF$ és $BE \perp CG$.
b) Számítsátok ki az $\dfrac{AB}{AC}$ arány értékét, ha $CGD\sphericalangle = 90°$.

14. Az $MNPQ$ paralelogrammában az M és N szögek szögfelezői az $A \in PQ$ pontban metszik egymást, a P és Q szögek szögfelezői pedig a $B \in MN$ pontban metszik egymást.
Legyen $MA \cap BQ = \{C\}$ és $AN \cap BP = \{D\}$. Tudva, hogy $ACBD$ négyzet, számítsátok ki az M szög mértékét és az $\dfrac{MN}{NP}$ arány értékét.

15. Az $ABCD$ négyzet belsejében megszerkesztjük a CDE egyenlő oldalú háromszöget, a külső tartományában pedig a BCF egyenlő oldalú háromszöget.



a) Mértani eszközök használatával készítsétek el a rajzot a füzetetekben.
b) Számítsátok ki a DEF szög mértékét.
c) Igazoljátok, hogy A, E és F kollineáris pontok.
d) Egészítsétek ki a rajzot az ACR egyenlő oldalú háromszöggel úgy, hogy az F és R pontok az AC egyenes ugyanazon oldalán helyezkedjenek el.
e) Bizonyítsátok be, hogy $CERF$ négyzet.

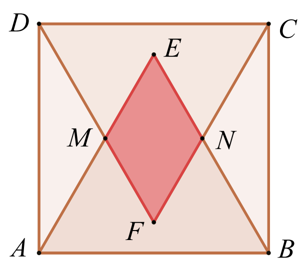
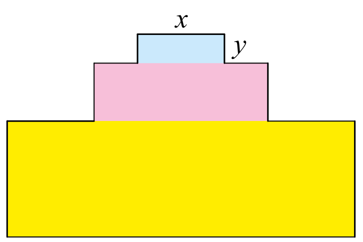
Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont jár

I. *Az alábbiak közül válasszátok ki azt a betűt, amely a helyes választ jelöli; csak egyetlen válasz helyes.*

5p	**1.** Az $ABCD$ téglalapban $DAC\sphericalangle = 2 \cdot ABD\sphericalangle$ és $AD = 3$ cm. A BD átló hossza: A. 12 cm B. 6 cm C. 3 cm D. 9 cm
5p	**2.** A $CDEF$ rombusz, ahol $CE \cap DF = \{O\}$, $CDE\sphericalangle = 120°$ és $DO = 4$ cm. A rombusz oldalainak hossza: A. 12 cm B. 4 cm C. 8 cm D. 6 cm
5p	**3.** Egy négyzet kerülete 64 cm. A négyszög középpontjának az egyik oldaltól mért távolsága: A. 16 cm B. 32 cm C. 12 cm D. 8 cm
5p	**4.** Az $MNPQ$ téglalapban $MP \cap NQ = \{O\}$, $\sphericalangle MON = 120^\circ$ és $NQ = 20$ cm. Az $MOQ\Delta$ kerülete: A. 50 cm B. 30 cm C. 45 cm D. 25 cm
5p	**5.** A $DEFG$ rombuszban DM az $FDG\sphericalangle$ szögfelezője és $M \in FG$. Tudjuk, hogy $DMF\sphericalangle = 123^\circ$. A $DEF\sphericalangle$ mértéke: A. 108° B. 104° C. 100° D. 96°
5p	**6.** Az M és N pont az $ABCD$ négyzet BC és CD oldalain helyezkedik el úgy, hogy az AMN háromszög egyenlő oldalú legyen. Az $AMC\sphericalangle$ mértéke: A. 105° B. 90° C. 75° D. 135°
5p	**7.** A P és Q pont az $ABCD$ rombusz AB és CD oldalának felezőpontja és $BPDQ$ téglalap. A $BQP\sphericalangle$ mértéke: A. 60° B. 90° C. 45° D. 30°
5p	**8.** Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben $AB = 10$ cm és a P pont a BC átfogón helyezkedik el. Legyen $PM \perp AB$, $M \in AB$ és $PN \perp AC$, $N \in AC$. Az $AM + AN$ összeg egyenlő: A. 20 cm B. 15 cm C. 10 cm D. 5 cm

II. *Az alábbi feladatokhoz teljes megoldás szükséges.*

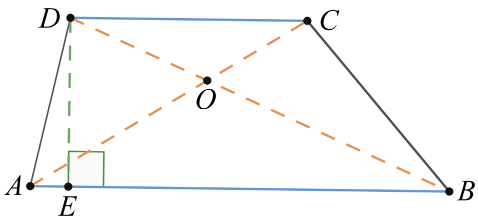
   5p **5p** **5p**	**1.** Az A, B, E ebben a sorrendben kollineáris pontok és $AB = 2 \cdot BE$. Az AE egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük az $ABCD$ és $BEFG$ négyzetet, ahol $AC \cap BD = \{O\}$ és M a DF szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy: a) $DBF\sphericalangle = 90^\circ$; b) $BD \parallel CF$; c) A, O és M pontok kollineárisak.
10p	**2.** A mellékelt ábrán egy négyzet alakú szőnyeg látható, az ABE és CDF háromszögek egyenlő oldalúak és $AE \cap DF = \{M\}$, $BE \cap CF = \{N\}$. Bizonyítsátok be, hogy $EMFN$ rombusz. 
15p	**3.** Az alábbi ábrán egy épület falára elhelyezett három téglalap alakú reklámtábla látható. A legkisebb tábla méretei x és y méter, ahol $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$. A másik két tábla mindegyikének méretei a föléje helyezett tábla méreteinek kétszerese. A reklámtáblák együttes kontúrhossza 30 m. Határozd meg annak az épületnek a minimális magasságát, amelyre a három reklámtábla felszerelhető. 

4.4. A trapéz: osztályozás, tulajdonságok. A trapéz középvonala

Fedezzük fel, értsük meg!

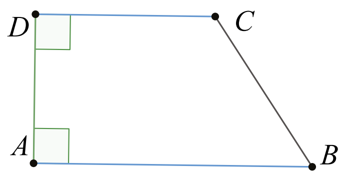
1. meghatározás. Trapéznak nevezzük az olyan konvex négyszöget, amelynek két szemben fekvő oldala párhuzamos, a másik kettő pedig nem.

Megnevezzük az $ABCD$ trapéz elemeit:
Az AB és CD párhuzamos oldalakat a trapéz *alapjainak* nevezzük.
Ha $AB > CD$, akkor AB a nagyalap és CD a kisalap.
Az AD és BC nem párhuzamos oldalakat a trapéz *szárainak* nevezzük.
Az AC és BD szakaszokat a trapéz átlóinak nevezzük.
A két alap közötti távolságot a trapéz *magasságának* nevezzük.
Ha $DE \perp AB$, $E \in AB$, akkor DE a trapéz magassága.

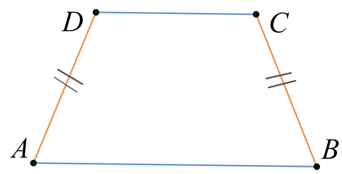


Megjegyzés. A „magasság" kifejezést fogjuk használni arra a szakaszra, amely összeköti az egyik alap egy pontját, (általában a trapéz csúcsát) az ebből a pontból a másik alapra bocsátott merőleges talppontjával.
A trapéz szárai alapján kiemelünk két sajátos esetet:

1) Ha egy trapéz egyik szára merőleges az alapra, akkor a trapézt *derékszögűnek* nevezzük.

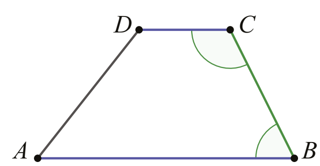


2) Ha egy trapéz szárai kongruensek, akkor a trapézt *egyenlő szárúnak* nevezzük.



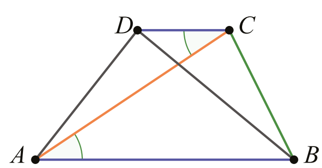
Megjegyzés. A meghatározás szerint egy konvex négyszög trapéz, ha bebizonyítjuk, hogy:
1) két szemben fekvő oldala párhuzamos 2) a másik két oldala nem párhuzamos.
Egy trapéz nem párhuzamos oldalai és átlói az alapok szelői. Mivel az alapok párhuzamosak, adódnak a következő tulajdonságok:

T_1: Egy trapéz szárain lévő belső szögek kiegészítő szögek.



Bizonyítás. Tekintsük a BC oldalt az AB és CD párhuzamos egyenesek szelőjének. Mivel $AB \parallel CD$, illetve $ABC\sphericalangle$ és $DCB\sphericalangle$ a szelő ugyanazon oldalán lévő belső szögek, következik, hogy kiegészítőszögek, így $ABC\sphericalangle + DCB\sphericalangle = 180°$.
Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $BAC\sphericalangle + CDA\sphericalangle = 180°$.

T_2: Egy trapéz átlói az alapokkal kongruens szögpárokat alkotnak.

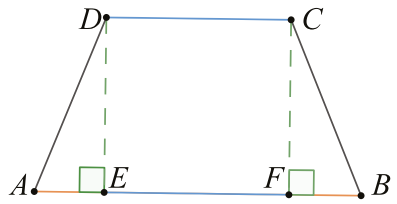


Bizonyítás: AC a trapéz alapjainak szelője.
$AB \parallel CD$, $DCA\sphericalangle$ és $BAC\sphericalangle$ belső váltószögek, tehát
$DCA\sphericalangle \equiv BAC\sphericalangle$. Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $CDB\sphericalangle \equiv ABD\sphericalangle$.

Alkalmazás

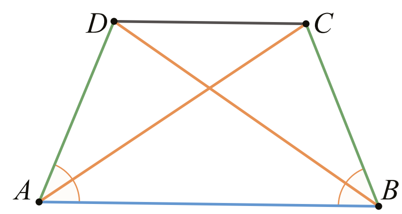
Mivel az egyenlő szárú trapéz rendelkezik kongruens szárakkal, rendelkezik sajátos tulajdonságokkal is.

1. tétel. Az egyenlő szárú trapéz alapon fekvő szögei kongruensek.



Bizonyítás: Kimutatjuk, hogy az $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ az $ABCD$ egyenlő szárú trapézban kongruensek. Legyen $DE \perp AB$ és $CF \perp AB$ úgy, hogy $E, F \in AB$. A $DCFE$ négyszög minden szöge derékszög, így téglalap. A szemben fekvő szögei kongruensek, például $DE \equiv CF$.
Észrevesszük, hogy az $ADE\Delta$ és $BCF\Delta$ derékszögű háromszögek, ahol az átfogók $AD \equiv BC$ (a trapéz szárai kongruensek) és a befogók $DE \equiv CF$ (a fentiekben bizonyítottuk).
Az Á.B. kongruencia esetből kapjuk, hogy a háromszögek kongruensek, és ebből következik, hogy $DAB\sphericalangle \equiv CBA\sphericalangle$. Mivel $ADC\sphericalangle$ és $DAB\sphericalangle$, illetve $BCD\sphericalangle$ és $CBA\sphericalangle$ kiegészítő szögek (trapéz szárain lévő szögek) kapjuk, hogy $ADC\sphericalangle \equiv DCB\sphericalangle$.
Megjegyzés. A gondolatmenet alapján azt is megtuduk, hogy $AE \equiv BF$ és $DC \equiv EF$. Ebből következik, hogy egy egyenlő szárú trapézban a magasságok talppontjai, amelyeket a kisalap csúcsából a nagyalapra húztunk, a nagyalapon az AE, EF, FB szakaszokat határozzák meg, úgy, hogy $AE \equiv BF$ és $DC \equiv EF$.

2. tétel. Az egyenlő szárú trapéz átlói kongruensek.

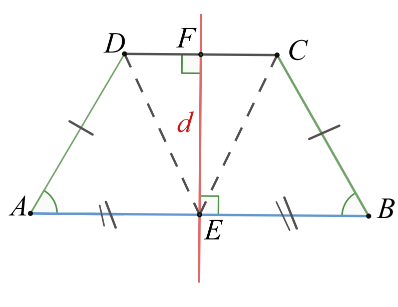


Bizonyítás. Meghúzzuk a trapéz AC és BD átlóit, majd megfigyeljük a $DAB\Delta$ és $CBA\Delta$-ben, hogy: $AD \equiv CB$, AB közös oldal és az 1. tételből következik, hogy, $DAB\sphericalangle \equiv CBA\sphericalangle$. Az O.SZ.O. kongruenciaeset alapján a két háromszög kongruens, tehát $AC \equiv BD$.
Az 1. illetve 2. tétel fordított tétele is igaz, és elégséges feltétel ahhoz, hogy egy trapéz egyenlő szárú legyen.
F_1: Ha egy trapéz alapon fekvő szögei kongruensek, akkor az egyenlő szárú.
F_2: Ha egy trapéz átlói kongruensek, akkor az egyenlő szárú.

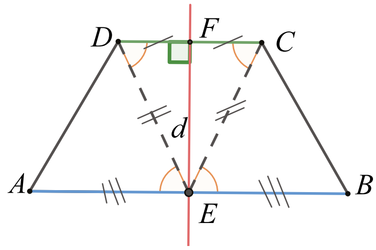
Feladat a portfólióba

Felhasználva az 1. tétel és 2. tétel jelöléseit, bizonyítsátok be egy osztálytársatokkal közösen az F_1 és F_2 elégséges feltételeket!

1. alkalmazás. Egy trapéz akkor és csakis akkor egyenlő szárú, ha az alapok felezőmerőlegesei egybeesnek.
Megoldás: Tekintsük az $ABCD$ trapézt, ahol AB és CD alapok. Vegyük észre, hogy két feltételezést kell bizonyítani:
1) Ha $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, akkor az alapok felezőmerőlegesei egybeesnek.
2) Ha az $ABCD$ trapézban az alapok felezőmerőlegesei egybeesnek, akkor a trapéz egyenlő szárú.



1) Tekintsük az $ABCD$ egyenlő szárú trapézt. Legyen E az AB szakasz felezőpontja és d a AB alap felezőmerőlegese. Mivel $AB \parallel CD$, így $d \perp CD$. A következő bizonyítás az, hogy a d egyenes a CD alap felezőmerőlegese is. Elégséges, hogy kapjunk egy pontot a d egyenesen, amely egyenlő távolságra van a C és D pontoktól (kisalap végpontjaitól). Az $AED\Delta$ és $BEC\Delta$-ben: $AE \equiv EB$ (E szerkesztés alapján felezőpont); $AD \equiv BC$ (egyelő szárú trapéz); $DAE\sphericalangle \equiv CBE\sphericalangle$ (egyenlő szárú trapéz alapján fekvő szögek). Az O.SZ.O. kongruenciaeset alapján kapjuk, hogy $AED\Delta \equiv BEC\Delta$, tehát $ED \equiv EC$.
Ha $\{F\} = d \cap CD$, akkor EF a CED egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magasság, így d a DC szakasz felezőmerőlegese is.



2) Tudjuk, hogy $ABCD$ trapéz, és hogy AB és CD az alapok felezőmerőlegesei egybeesnek. Bebizonyítjuk, hogy a trapéz egyenlő szárú vagyis, hogy a nem párhuzamos oldalai kongruensek. Jelöljük E és F pontokkal az AB, illetve DC alapok felezőpontjait. Az $AED\Delta$ és a $BEC\Delta$-ben: $AE \equiv BE$ (EF felezőmerőlegese az AB-nek); $DE \equiv CE$ (EF felezőmerőlegese a CD-nek); $AED\sphericalangle \equiv BEC\sphericalangle$ ($AED\sphericalangle \equiv EDC\sphericalangle$ mivel belső váltószögek és $AB \parallel CD$, DE szelő; $EDC\sphericalangle \equiv ECD\sphericalangle$ az ECD egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei; $ECD\sphericalangle \equiv BEC\sphericalangle$, mivel belső váltószögek és $AB \parallel CD$, CE szelő).

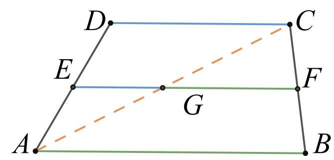
Az O.SZ.O. kongruencia eset alapján következik, hogy a két háromszög kongruens és a megfelelő elemek kongruensek. Például $AD \equiv BC$, amiből következik, hogy a trapéz egyenlő szárú.

Megjegyzés. A fentiekből kimutattuk, hogy: *egy trapéz egyenlő szárú, akkor és csakis akkor, ha az alapok felezőpontjait összekötő egyenes pontosan az alapok felezőmerőlegese*.

2. értelmezés. A trapéz nem párhuzamos oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszt a *trapéz középvonalának* nevezzük.

A következő tétel a középvonal két fontos tulajdonságát mutatja.

3. tétel. A trapéz középvonala párhuzamos az alapokkal és hossza az alapok hosszának félösszegével egyenlő.



Bizonyítás. A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük. Párhuzamos a harmadik oldallal, és hossza egyenlő a harmadik oldal hosszának a felével.

Az $ABCD$ trapézban jelöljük az AD és BC nem párhuzamos oldalak felezőpontjait E, illetve F pontokkal.

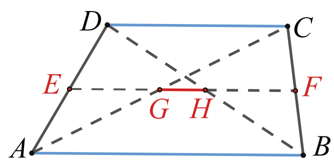
Jelöljük az AC átló felezőpontját G-vel. Ekkor EG az $ADC\Delta$ középvonala és GF az $ABC\Delta$ középvonala.

Ebből származik, hogy $EG \parallel DC$ és $GF \parallel AB$, de $AB \parallel CD$ (trapéz alapjai), tehát $GE \parallel AB \parallel GF$. A G ponton keresztül egyetlen párhuzamos egyenes húzható AB-vel (párhuzamossági axióma), következik, hogy E, G, F kollineárisak és $EF \parallel AB \parallel DC$.

A háromszög középvonalának hossza: $EG = \dfrac{CD}{2}$ és $GF = \dfrac{AB}{2}$, összeadva $EF = EG + GF = \dfrac{AB+CD}{2}$.

Megjegyzés. Egy trapéz középvonalának hossza egyenlő az alapok hosszának számtani közepével.

2. alkalmazás.



1) Egy trapéz átlóinak felezőpontja a trapéz középvonalán található és a trapéz középvonalából az átlók által kimetszett szakasz hossza a trapéz alapjai hosszának félkülönbségével egyenlő.
2) Ha egy konvex négyszög egyik átlójának felezőpontja két szemben fekvő oldal felezőpontjait összekötő szakaszon helyezkedik el, akkor a négyszög trapéz.

Megoldás.

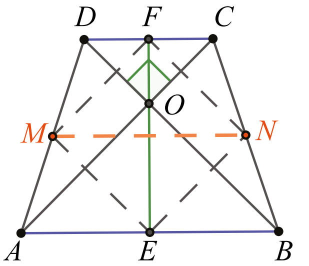
1) $ABCD$ trapéz ($AB \parallel CD$ és $AB > CD$), E-vel és F-fel jelöltük az AD illetve BC oldal felezőpontját, G-vel és H-val jelöltük az AC, illetve BD átló felezőpontját. Az ADC és ABC háromszögekben alkalmazva a középvonal párhuzamosságát következik, hogy $GE \parallel CD \parallel AB \parallel GF$. A párhuzamossági axióma azt mondja ki, hogy a G ponton keresztül egyetlen AB-vel párhuzamos egyenes húzható, tehát GE és GF egybeesnek vagy $G \in EF$.

Hasonlóan mutatjuk ki, hogy a BD felezőpontja, vagyis H, az EF szakaszon helyezkedik el. Mivel EF a trapéz középvonala, ezért párhuzamos az alapokkal, vagyis $GH \parallel AB \parallel DC$. Az $ADC\Delta$ és $BDC\Delta$, háromszögek középvonalára teljesül, hogy: $EG = \dfrac{DC}{2} = HF$.

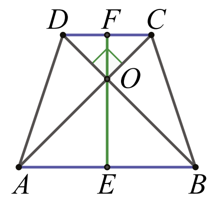
Kiszámítjuk a GH szakasz hosszát: $GH = EF - EG - HF = \dfrac{AB+CD}{2} - \dfrac{CD}{2} - \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AB-CD}{2}$.

2) $ABCD$ konvex négyszög, jelöljük E és F ponttal az AD, illetve BC oldal felezőpontját, G-vel az AC átló felezőpontját. Tudjuk, hogy G az EF szakaszon helyezkedik el. Ekkor EG az $ADC\Delta$, középvonala és GF az $ABC\Delta$ középvonala. Következik, hogy $GE \parallel CD$ és $GF \parallel AB$, viszont G, E, F kollineárisak, így $AB \parallel CD$ (két különböző egyenes, amelyek párhuzamosak egy harmadikkal, egymással is párhuzamos).

3. alkalmazás. Ha egy egyenlő szárú trapéz átlói merőlegesek egymásra, akkor a magasság hossza egyenlő a középvonal hosszával.



I. megoldás. Legyen $ABCD$ konvex négyszög és M, E, N, F az oldalak felezőpontjai, ahogy az ábrán is látható. Tudjuk, hogy egy konvex négyszög oldalainak felezőpontjai meghatároznak egy paralelogrammát. A mi esetünkben $MENF$ paralelogramma és $ME = \dfrac{BD}{2}$, $EN = \dfrac{AC}{2}$, $BD = AC$, tehát $MENF$ rombusz. Mivel $ME \parallel BD$, $EN \parallel AC$ és $BD \perp AC$, így $ME \perp EN$ és $MENF$ négyzet, tehát átlói kongruensek, $EF = MN$.
Mivel a trapéz egyenlő szárú, következik, hogy EF magasság (az $OAB\Delta$, $OCD\Delta$ egyenlő szárúak és az OE illetve OM oldalfelezők magasságok is és a tartóegyenesei megegyeznek). Következésképpen EF a trapéz magassága, illetve MN a középvonala és $EF = MN$.

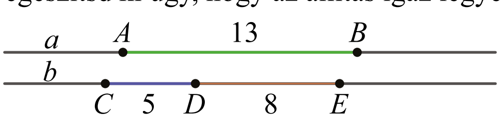


II. megoldás. Legyen $ABCD$ egyenlő szárú trapéz úgy, hogy $AB \parallel CD$ és $AD \equiv BC$ illetve O az átlók metszéspontja. Az O.O.O. kongruencia eset alapján kapjuk, hogy ABD és BAC háromszögek kongruensek ($AB \equiv BA$, $BD \equiv AC$, $AD \equiv BC$), így $OBA\sphericalangle \equiv OAB\sphericalangle$. Mivel $AC \perp BD$, következik, hogy $AO \perp BO$ és AOB egyenlő szárú derékszögű háromszög. Megszerkesztjük az $OE \perp AB$, $E \in AB$ és $OE \cap CD = \{F\}$. Az OE szakasz az AOB háromszög átfogójához tartozó oldalfelező, tehát $OE = \dfrac{AB}{2}$. Hasonlóan, COD egyenlő szárú derékszögű háromszög és $OF = \dfrac{CD}{2}$. Mivel EF a trapéz magassága, következik, hogy $EF = OE + OF = \dfrac{AB+CD}{2}$, ami a trapéz középvonalának hossza.

Gyakorlatok és feladatok

1. Rajzolj mértani eszközök segítségével egy $MNPQ$ konvex négyszöget, amelyben: $MNP\sphericalangle = 105°$, $NPQ\sphericalangle = 75°$ és $PQM\sphericalangle = 135°$. Egészítsd ki a mondatokat úgy, hogy az állítás igaz legyen:
p_1: Az $MNPQ$ konvex négyszög egy … .
p_2: Az MN és PQ szakaszokat … nevezzük.
p_3: Az NP és MQ szakaszokat … nevezzük.
p_4: Az MP és NQ szakaszokat … nevezzük.

2. Az ábrán az a és b egyenes párhuzamos. Másold le a füzetbe a mondatokat, majd egészítsd ki úgy, hogy az állítás igaz legyen.



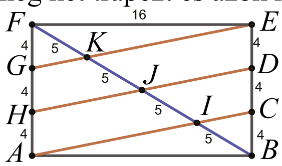
p_1: Az $ABEC$ konvex négyszög … .
p_2: Az $ACDB$ konvex négyszög … .

3. a) Szerkessz mértani eszközök segítségével egy $EFGH$ trapézt, melyben $EF \parallel GH$, $E\sphericalangle = 70°$ és $F\sphericalangle = 50°$.
b) Másold le a füzetbe a mondatokat, majd egészítsd ki úgy, hogy az állítás igaz legyen:
p_1: A trapéz nagyalapja … .
p_2: A trapéz kisalapja … .
p_3: A G szög mértéke … .
p_4: A H szög mértéke … .

4. Szerkeszd meg az $IJKL$ derékszögű trapézt, amelyben $I\sphericalangle = L\sphericalangle = 90°$, $IJ = 8$ cm, $J\sphericalangle = 60°$, $JK = 5$ cm.
a) Írd le a szerkesztés lépéseit.
b) Nevezd meg a trapéz alapjait és szárai!

5. Szerkeszd meg az $ABCD$ egyenlő szárú trapézt, amelyben $A\sphericalangle = B\sphericalangle = 60°$, $AB = 10$ cm, $BC = 5$ cm.
a) Írd le a szerkesztés lépéseit.
b) Nevezd meg a trapéz alapjait és szárait!

6. Az ábrán egy $ABEF$ téglalap látható.
Nevezz meg két trapézt és azok középvonalát.



7. a) Számítsd ki az $MNPQ$ trapéz szögeinek mértékét tudva, hogy egyidejűleg teljesülnek a következők:
$M\sphericalangle + N\sphericalangle + P\sphericalangle = 320°$,
$Q\sphericalangle + P\sphericalangle = 180°$, $P\sphericalangle = 2 \cdot M\sphericalangle$.
b) A fenti adatoknak megfelelően, mértani eszközök segítségével készíts egy ábrát.

8. Számítsd ki az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz szögeinek mértékét a következő esetekben:
a) $A\sphericalangle = 55°$ és $AB \parallel CD$;
b) $A\sphericalangle = B\sphericalangle$ és $C\sphericalangle + D\sphericalangle = 260°$.

9. Adott az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz, amelyben $A\sphericalangle = 3 \cdot C\sphericalangle$ és $C\sphericalangle \equiv D\sphericalangle$.
a) Határozd meg a trapéz alapjait.
b) Számítsd ki a trapéz szögeinek mértékét.
c) Igazold, hogy az AD és BC egyenesek merőlegesek egymásra!

10. Az $MNPQ$ négyszögben $MN \parallel PQ$, $MQ \nparallel NP$, $MQ \equiv NP$ és $MP \cap NQ = \{O\}$. Határozd meg a következő kijelentések igazságértékét:
a) $MN \equiv PQ$;
b) $MP \equiv NQ$;
c) $NMQ\sphericalangle \equiv MNP\sphericalangle$;
d) $NMQ\sphericalangle \equiv NPQ\sphericalangle$;
e) $MNP\sphericalangle + MQP\sphericalangle = 180°$;
f) $MO \equiv OP$;
g) $OP \equiv OQ$;
h) $MON\Delta$ egyenlő szárú.

11. Adott a $CDEF$ trapéz, melyben $CD \parallel EF$, M a CD oldal felezőpontja és $ME = MF$.
Mutasd ki, hogy $CDEF$ egyenlő szárú trapéz!

12. Az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD, AC a BAD szög szögfelezője és BD az ABC szög szögfelezője. Bizonyítsd be, hogy $AC \equiv BD$.

13. Az $MNPQ$ konvex négyszögben az M szög mértéke 68° és az N szög mértéke 112°.
Mutasd ki, hogy $MNPQ$ trapéz vagy paralelogramma!

14. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz, ahol $AB \parallel CD$ és $AC \cap BD = \{O\}$. Igazold, hogy:
a) az AOB és COD egyenlő szárú háromszögek;
b) az AOD és BOC kongruens háromszögek.

15. Egy derékszögű trapéz egyik szögének mértéke 72°. Határozd meg a trapéz többi szögének mértékét!

16. Adott az $ABCD$ derékszögű trapéz, amelyben $A\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$, $AB < CD$, és BCD egyenlő szárú háromszög. Számítsd ki az ABC, BCD, CDB szögek mértékét!

17. $MNPQ$ egy derékszögű trapéz, $MN \parallel PQ$, $M\sphericalangle = 90°$, $MN = 14$ cm, $MQ = = QP = 6$ cm. Számítsd ki a PN oldal hosszát!

18. A $TRAP$ trapézban $TR \parallel AP$, $TR > AP$, $PTR\sphericalangle = 90°$, és TPA illetve TAR egyenlő szárú háromszög. Számítsd ki a trapéz szögeinek mértékét, minden lehetséges esetet tárgyalva!

19. Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget, melyben $A\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$, $AB > CD$. P a BC oldal egy pontja úgy, hogy $BP = AB$ és $CP = CD$.
Számítsd ki az $APD\sphericalangle$ mértékét!

20. Az $MNPQ$ trapéz alapjai MN és PQ úgy, hogy $MN = 2 \cdot PQ$ és $M\sphericalangle = 90°$. Legyen $PE \perp MN$, $E \in MN$ és $PE \cap NQ = \{R\}$. Bizonyítsd be, hogy:
a) $PR \equiv RE$;
b) Ha $MR \cap QE = \{G\}$, akkor G az MNQ háromszög súlypontja.

21. Adott az $ABCD$ trapéz, amelynek nagyalapja AB. Jelöljük az AD oldal felezőpontját M-mel és a BC oldal felezőpontját N-nel.
a) Számítsd ki az MN szakasz hosszát, ha $AB = 13$ cm, $CD = 9$ cm.
b) Számítsd ki a CD, szakasz hosszát, ha $AB = 16$ cm, $MN = 10$ cm.

22. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, E és F az AD illetve BC oldal felezőpontja. Tudva, hogy $AEF\sphericalangle = 127°$ és $CFE\sphericalangle = 54°$, számítsd ki a trapéz szögeinek mértékét!

23. Az $MNPQ$ trapézban $MN \parallel PQ$, A az MQ oldal felezőpontja, B az AM szakasz felezőpontja, illetve $C \in PN$ úgy, hogy $CP = CN$ és $D \in CN$ úgy, hogy $CD = ND$.
a) Készíts egy rajzot a fenti adatoknak megfelelően.
b) Ha $MN = 8$ cm és $PQ = 2$ cm, számítsd ki a BD szakasz hosszát!

24. Az EF szakasz az $ABCD$ trapéz középvonala, $E \in AD$ és $F \in BC$. P az E pont F szerinti szimmetrikusa. Bizonyítsd be, hogy:
a) $CP \equiv BE$ és $CE \parallel BP$;
b) $EP = AB + CD$.

Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont jár.

I. *Az alábbiak közül válasszátok ki azt a betűt, amely a helyes választ jelöli; csak egyetlen válasz helyes.*

5p	**1.** Egy derékszögű trapéz egyik szögének mértéke 45° és az alapok hossza 28 cm, illetve 20 cm. A trapéz magassága egyenlő: A. 8 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 16 cm
5p	**2.** $ABCD$ egyenlő szárú trapéz, amelyben $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $AB = 4$ cm és $ABC\sphericalangle = 135^\circ$. Ha $BE \perp CD$ és $BE = 6$ cm, akkor a CD oldal hossza egyenlő: A. 20 cm B. 14 cm C. 16 cm D. 15 cm
5p	**3.** Egy egyenlő szárú trapéz szemben fekvő szögei: A. pótszögek B. kiegészítő szögek C. kongruensek D. mértékük 60°
5p	**4.** Legyen $ADEJ$ téglalap. Az AD oldalt három kongruens szakaszra osztjuk: $AB \equiv BC \equiv CD$; az EJ oldalt öt kongruens szakaszra osztjuk: $EF \equiv FG \equiv GH \equiv HI \equiv IJ$. Mennyi az egyenlő szárú trapézok száma, ha a négy csúcsa az $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ pontok között van: A. 3 B. 4 C. 5 D. 2

II. *Párosítsátok az első oszlopban lévő számokkal jelölt kifejezéseket a második oszlopban lévő válaszokkal, úgy, hogy helyes legyen!*

Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz, $AB \parallel CD$, $AD = DC = CB = \dfrac{AB}{2}$ és E az AB alap felezőpontja.

	A	B
5p	**1.** $A\sphericalangle =$	a. 30°
5p	**2.** $ADC\sphericalangle =$	b. 60°
5p	**3.** $ABD\sphericalangle =$	c. 120°
5p	**4.** $(BD,CE)\sphericalangle =$	d. 90° e. 45°

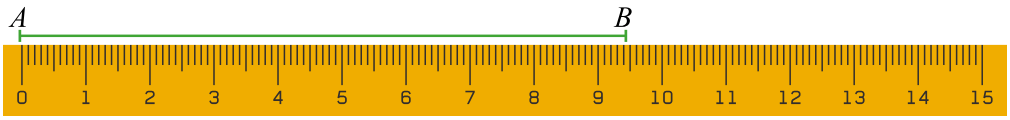
III. *Az alábbi feladatokhoz teljes megoldás szükséges.*

	1. Adott az $ABCD$ trapéz, amelyben $A\sphericalangle = B\sphericalangle = 90^\circ$, $AD < BC$ és E az AB oldal egy pontja úgy, hogy $AED\sphericalangle \equiv BEC\sphericalangle$. A B ponton keresztül a DE egyeneshez húzott párhuzamos az EC egyenest az F pontban metszi és $BCE\sphericalangle = 30^\circ$. Mutassátok ki, hogy:
10p	a) BEF háromszög egyenlő szárú;
10p	b) F a CE szakasz felezőpontja.
	2. Az ABC háromszög derékszögű A-ban, M az AC, N a BC oldal felezőpontja és P az M pont szimmetrikusa az N pontra nézve. Legyen $AP \cap BM = \{D\}$. Bizonyítsátok be, hogy:
10p	a) $ABPM$ téglalap;
10p	b) $AMND$ derékszögű trapéz;
10p	c) $MB \parallel CP$.

4.5. Kerületek és területek

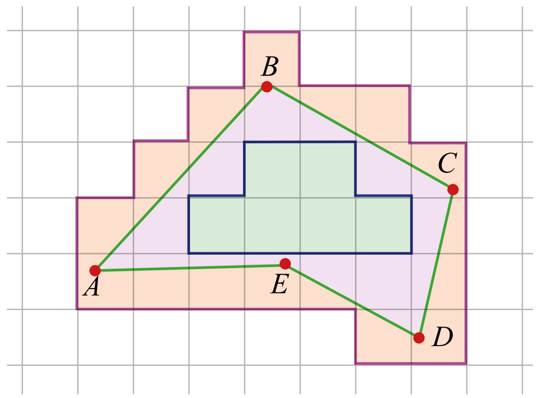
Az embereket már ősidők óta foglalkoztatja a tárgyak összehasonlítása. A méreteiket a szabványméretekkel hasonlították össze. Annak érdekében, hogy ezek pontosabbak legyenek, törtrészek használatát vezették be.

Például a hosszúság esetében a nemzetközi mértékegység a méter és ennek többszörösei, illetve törtrészei. Egyes országokban vagy munkaterületeken egy másik mértékegységet használnak, amelyet hüvelyknek vagy inch-nek nevezünk (incsnek olvassuk) 1 inch = 2,54 cm.



A területek esetében az alapmértékegység a négyzetméter (1 méter oldalhosszúságú négyzet területe), ennek többszörösei, illetve törtrészei.
Egy mértani alakzat területét becsülni tudjuk, ha közrefogjuk két, területegységekből álló hálózattal: az egyik teljesen lefedi az alakzatot, a másik pedig teljes mértékben az alakzat belsejében helyezkedik el.

Példa: A mellékelt ábrán látható *ABCDE* síkidom területe nagyobb, mint 6 területegység és kisebb, mint 27 területegység. Természetesen, ha minél kisebb oldalhosszúságú területegységekből álló hálózattal fedjük le, annál pontosabban meg lehet határozni a kért területet



Emlékeztető

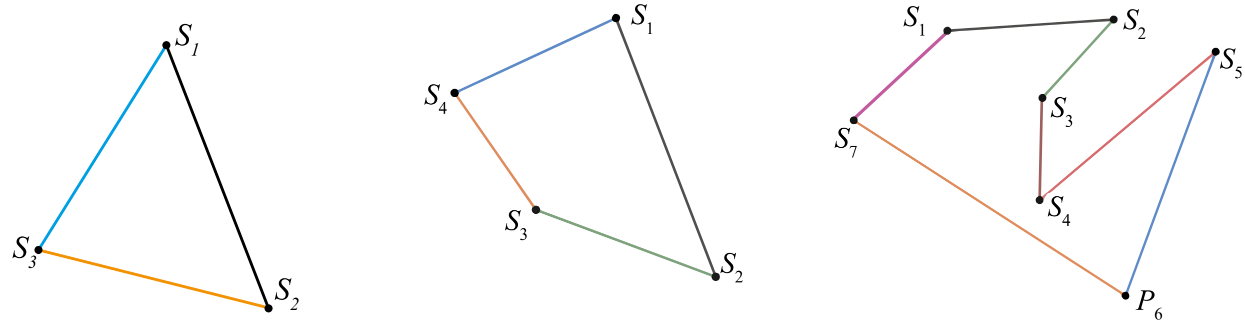
1) a. Az ABC háromszög kerülete: $\mathcal{K} = AB + BC + AC$.
   b. Az $ABCD$ téglalap kerülete: $\mathcal{K} = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot (AB + BC)$.
   c. Az $ABCD$ négyzet kerülete: $\mathcal{K} = AB + BC + CD + DA = 4 \cdot AB$.
2) Egy háromszög belső tartománya a szögei belső tartományának metszete.
3) *Háromszöglapnak* nevezzük a háromszög belsejében vagy valamely oldalán található pontok halmazát. Hasonló módon értelmezzük a négyszöglap és a többi sokszöglap fogalmát.
4) a. A háromszög területe egyenlő az egyik oldal és a hozzátartozó magasság szorzatának felével.
   b. A téglalap területe egyenlő két szomszédos oldal hosszának szorzatával.
   c. A négyzet területe egyenlő az oldalhosszának négyzetével.

Általánosabb mértani alakzatokra is kiterjeszthető a kerület és a terület fogalma.

Fedezzük fel, értsük meg!

Vizsgáljuk meg az újonnan tanult alakzatokat!
Ezért ismerkedjünk meg a sokszög fogalmával. A háromszög, négyszög és a hatszög olyan sokszög, melynek 3, 4, illetve 6 oldala van.
Egy síkban elhelyezett zárt mértani alakzatot *n oldalú sokszögnek* nevezünk, ha S_1, S_2, S_3, ..., S_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, csúcsoknak nevezett pontokból, és az S_1S_2, S_2S_3, ..., S_nS_1, oldalaknak nevezett szakaszokból tevődik össze, azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két oldalnak legfeljebb egy csúcs lehet közös pontja.

1. értelmezés: Egy sokszög kerülete egyenlő az oldalai hosszának összegével.

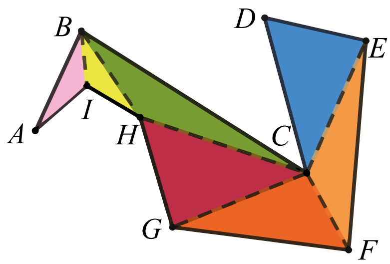


$\mathcal{K} = S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1$ $\mathcal{K} = S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + S_4S_1$ $\mathcal{K} = S_1S_2 + S_2S_3 + \ldots + S_6S_7 + S_7S_1$

Következtetésképpen, az *ABCD* konvex négyszög kerülete (paralelogramma, téglalap, négyzet, trapéz, ...) egyenlő:

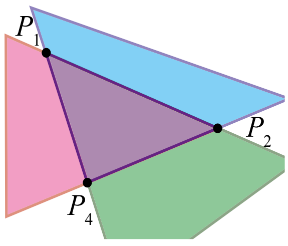
$$\mathcal{K} = AB + BC + CD + DA.$$

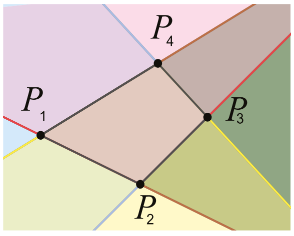
Közvetlen megfigyeléssel észleljük, hogy:



1) Minden sokszöglap felbontható háromszöglapokra.
Példa. Az ábrán látható *ABCDEFGHI* sokszög az *ABI*, *BIH*, *BHC*, *CDE*, *ECF*, *FCG* és *GHC* háromszög alakú felületek egyesítése.

2) Egy sokszög belső tartománya a szögei belső tartományának metszete.
Példá. A konvex négyszög belső tartományát értelmezhetjük úgy, ahogy a háromszögek belső tartományát is, vagyis szögei belső tartományának metszeteként.
Megjegyzés. Egy konvex négyszög belső tartományát egyszerűbben is megkaphatjuk, két szemben fekvő szöge belső tartományának metszeteként.





Alkalmazás

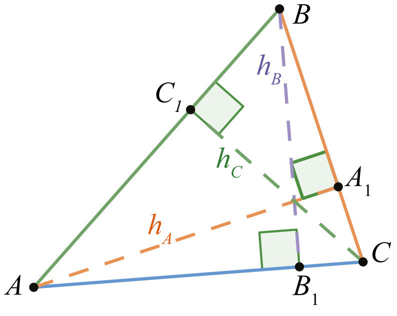
A. A háromszög kerülete és területe

Ha az *ABC* háromszög oldalai $BC = a$, $AC = b$ és $AB = c$ és kerületét $\mathcal{K}$-val jelöljük, akkor :

$$\mathcal{K} = a + b + c.$$

Visszatérünk a háromszög területéhez. A hatodik tanegységben fogjuk bizonyítani, hogy egy háromszög egyik oldala és a hozzá tartozó magasság szorzata állandó.
Az ábra jelöléseit használva, $h_A = AA_1$, $h_B = BB_1$, $h_C = CC_1$, a fenti kijelentés így írható: $a \cdot h_A = b \cdot h_B = c \cdot h_C$.
A szorzatok közös értéke egyenlő a háromszög területének kétszeresével. Ha az *ABC* háromszög területét $\mathcal{T}_{ABC}$-vel jelöljük, azt eredményezi, hogy:

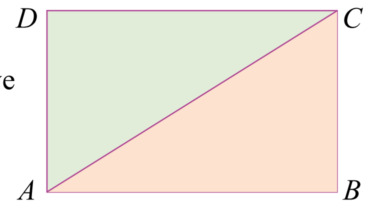
$$\mathcal{T}_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{c \cdot h_C}{2}.$$



Meg kell jegyeznünk, hogy előnyösen kiválaszthatjuk az oldalt és a hozzá tartozó magasságot (azokat, amelyeket ismerünk, vagy amelyeket egyszerűen ki tudunk számolni). Sajátosan, egy derékszögű háromszögben a terület egyenlő a *befogók szorzatának felével*.

1. alkalmazás. Fedezzük fel újra a téglalap és a négyzet területét háromszögekre bontva az említett alakzatokat, illetve felhasználva a háromszögek területét.

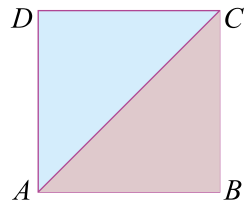
ABCD téglalap, tehát $AB = CD$ és $AD = BC$, illetve az *ABC* és *ADC* derékszögű háromszögek.



$$\mathcal{T}_{ABCD} = \mathcal{T}_{ABC} + \mathcal{T}_{ACD} = \frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{DC \cdot AD}{2} = AB \cdot BC$$

A téglalap területe egyenlő két szomszédos oldal hosszának szorzatával.

ABCD négyzet, tehát $AB = CD = AD = BC$, illetve az *ABC* és *ADC* derékszögű háromszögek.



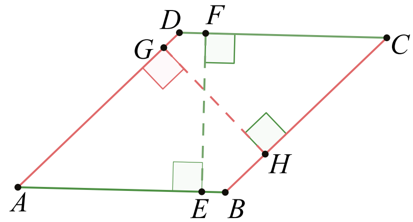
$$\mathcal{T}_{ABCD} = \mathcal{T}_{ABC} + \mathcal{T}_{ACD} = AB \cdot BC = AB^2$$

A négyzet területe egyenlő az oldalhosszának négyzetével.

B. A paralelogramma kerülete és területe

Az *ABCD* paralelogramma *AB* (vagy *CD*) oldalához tartozó *magasságnak nevezzük* az *AB* és *CD* párhuzamos egyenesek közötti távolságot, vagyis az *EF* szakasz hosszát, ahol $E \in AB$, $F \in CD$, $AB \perp EF$ és $EF \perp CD$.

Hasonlóan, az *AD* és *BC* párhuzamos egyenesek közötti távolságot, vagyis a *GH* szakasz hosszát, ahol $G \in AD$, $H \in BC$, $AD \perp GH$ és $GH \perp BC$ a *paralelogramma AD* (vagy *BC*) *oldalához tartozó magasságnak* fogjuk nevezni.

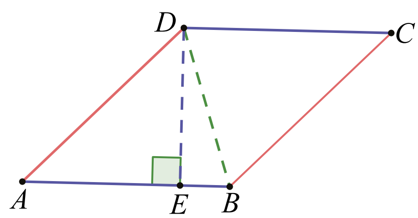


A paralelogramma kerülete az oldalai hosszának összege. Mivel a szemben fekvő oldalai kongruensek, kapjuk, hogy:

$$\mathcal{K} = AB + BC + CD + DA = 2(AB + BC).$$

Az *ABCD* paralelogramma területét úgy számítjuk ki, hogy felbontjuk egyik átló segítségével két háromszögre, amelyekről bebizonyítjuk, hogy kongruensek.

Az *ABD* és *BDC* háromszögek megfelelő oldalai kongruensek, így az O.O.O. kongruencia esetből következik, hogy a háromszögek kongruensek. Két kongruens mértani alakzat kerülete és területe megegyezik:



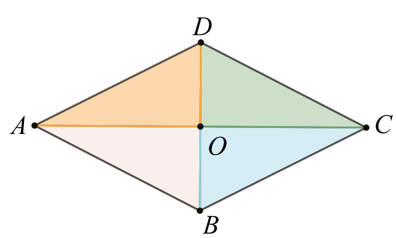
$$\mathcal{T}_{ABCD} = \mathcal{T}_{ABD} + \mathcal{T}_{BCD} = 2 \cdot \mathcal{T}_{ABD} = 2 \cdot \frac{DE \cdot AB}{2} = DE \cdot AB.$$

A paralelogramma területe egyenlő az egyik oldal hossza és a hozzá tartozó magasság hosszának szorzatával.

C. A rombusz kerülete és területe

A rombusz minden oldala kongruens, tehát a kerülete: $\mathcal{K} = AB + BC + CD + DA = 4 \cdot AB$.

Felbontjuk a rombuszt az átlók segítségével négy derékszögű háromszögre. Egyszerűen kimutatható a rombusz tulajdonságai alapján (az átlói felezik egymást és merőlegesek egymásra), hogy a négy derékszögű háromszög kongruens egymással (B.B. eset alapján), így területeik megegyeznek.



$$\mathcal{T}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{T}_{AOB} = 4 \cdot \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Ha d_1 és d_2 az *AC* illetve *BD* átló hosszát jelöli, akkor: $\mathcal{T}_{ABCD} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

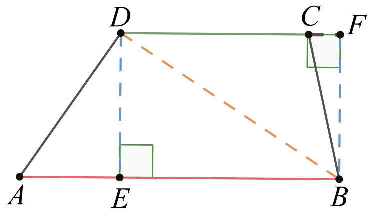
A rombusz területe egyenlő az átlók hosszának félszorzatával.

A trapéz kerülete és területe

A trapéz egy négyszög. Következtetésképpen kerülete: $\mathcal{K} = AB + BC + CD + DA$.

A fenti eljárásokhoz hasonlóan, a trapéz területét is úgy számítjuk ki, hogy felbontjuk két háromszögre: $\mathcal{T}_{ABCD} = \mathcal{T}_{ABD} + \mathcal{T}_{BDC}$.
Jelöljük a D csúcsból az AB oldalra és a B csúcsból a DC oldalra bocsátott magasságok talppontjait E illetve F pontokkal. Mivel $AB \parallel DC$, alkalmazva a területképletet a két háromszögben, azt kapjuk, hogy:

$$\mathcal{T}_{ABCD} = \frac{AB \cdot DE}{2} + \frac{DC \cdot BF}{2} = \frac{(AB + DC) \cdot DE}{2}.$$



Ha egy trapézban B a nagyalap, b a kisalap, h pedig a trapéz magasságának hosszát jelöli, akkor:

$$\mathcal{T}_{ABCD} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}.$$

A trapéz területe egyenlő az alapok hosszának összege és a magasság szorzatának a felével.

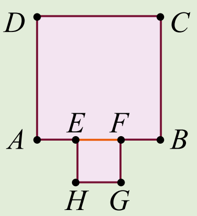
2. alkalmazás.

a) Az L oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet AB oldalát az E és F pont három egyenlő részre osztja. Az $ABCD$ négyzet külső tartományában megszerkesztjük az $EHGF$ négyzetet. Számítsátok ki az $AEHGFBCD$ sokszög kerületét és területét.

b) Ha az $ABCD$ négyzet minden oldalán elvégezzük a fentiekben leírt szerkesztést, akkor határozzátok meg az így keletkezett sokszög kerületét és területét.

c) Ha a b) pontban ábrázolt alakzat esetén mindegyik oldal középső egyharmadára szerkesztünk egy külső négyzetet, határozzátok meg az így létrejött sokszög kerületét és területét.

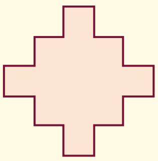
a)



$$\mathcal{K} = \frac{14 \cdot L}{3}$$

$$\mathcal{T} = \frac{10 \cdot L^2}{9}$$

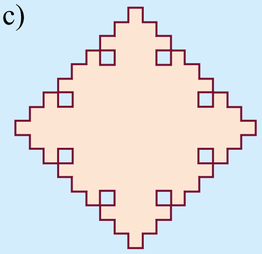
b)



$$\mathcal{K} = \frac{20 \cdot L}{3}$$

$$\mathcal{T} = \frac{13 \cdot L^2}{9}$$

c)



$$\mathcal{K} = \frac{100 \cdot L}{9}$$

$$\mathcal{T} = L^2 + 4\frac{L^2}{9} + 20\frac{L^2}{81}$$

Útmutatás: Megfigyelve a fenti ábrákat, magyarázzátok meg mindhárom esetben leírt eredményt.

Jegyezd meg!

- Egy sokszög kerülete egyenlő az oldalai hosszának összegével.
- A háromszög területe egyenlő az egyik oldal és a hozzátartozó magasság szorzatának felével.
- A téglalap területe egyenlő két szomszédos oldal hosszának szorzatával.
- A négyzet területe egyenlő az oldalhosszának négyzetével.
- A paralelogramma területe egyenlő egyik oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatával.
- A rombusz területe egyenlő az átlók hosszának félszorzatával.
- A trapéz területe egyenlő az alapok hosszának összege és a magasság szorzatának a felével.

Gyakorlatok és feladatok

1. Számítsátok ki az $ABCD$ konvex négyszög kerületét, ha:
a) $AB + BC = 18$ dm, $BC + CD = 22$ dm, $CD + DA = 24$ dm, $DA + AB = 20$ dm.
b) $AD = 7$ cm, $CD = 9$ cm, $\mathcal{K}_{ADC} = 28$ cm és ABC egyenlő oldalú háromszög.

2. Adott az $ABCD$ paralelogramma, ahol $AC \cap BD = \{O\}$. Tudva, hogy $\mathcal{K}_{AOB} = 26$ cm, $\mathcal{K}_{BOC} = 24$ cm és $AC + BD = 28$ cm, számítsátok ki a paralelogramma kerületét.

3. Az $ABCD$ téglalapban $AC \cap BD = \{O\}$, $BC = 9$ cm és $\mathcal{K}_{AOD} = 24$ cm.
a) Számítsátok ki az AC és AB oldalak hosszát.
b) Számítsátok ki a téglalap kerületét és területét.

4. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 9 cm és 12 cm.
a) Számítsátok ki a háromszög területét.
b) Számítsátok ki az átfogó és a hozzá tartozó magasság hosszát.

5. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának hossza 10 cm. Számítsátok ki az átfogóhoz tartozó magasság hosszát, majd a háromszög területét.

6. Számítsátok ki az ABC háromszög területét, ha $AB = 8$ cm, $BC = 1$ dm és $ABC\sphericalangle = 150°$.

7. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm és $BAD\sphericalangle = 30°$. Számítsátok ki:
a) $d(D, AB)$ és $d(C, AD)$;
b) a paralelogramma kerületét és területét.

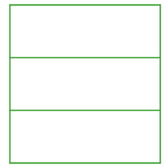
8. Egy rombusz kerülete 40 cm és az egyik szöge 150°. Számítsátok ki a rombusz területét, majd az átlók hosszának szorzatát.

9. Legyen M az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja. Mutassátok ki, hogy az ABM és ACM háromszögek területei megegyeznek.

10. Legyen N az ABC háromszög BC oldalának egy pontja úgy, hogy $BN = 3 \cdot CN$.
a) Számítsátok ki az ABC és CAN háromszögek területének arányát, majd a BN és CN szakaszok arányát.
b) Keressetek egy összefüggést az így kapott arányok között.

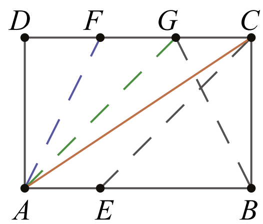
11. Az $ABCD$ paralelogrammában O az átlók metszéspontja.
a) Igazoljátok, hogy az AOB és BOC háromszögek területe egyenlő.
b) Ha $\mathcal{T}_{AOD} = 8$ dm², számítsátok ki a paralelogramma területét.

12. Egy négyzet alakú telek egyik oldalával párhuzamos két egyenessel felosztunk három téglalap alakú részre. Tudva, hogy mindegyik téglalap kerülete 80 dam, számítsátok ki:



a) a négyzet oldalának hosszát;
b) mindegyik téglalap és a telek területét, hektárban kifejezve.

13. Az ábrán $ABCD$ egy téglalap, amelyben, $AB = 18$ cm, $BC = 12$ cm, $BE = 2 \cdot AE$ és $CG = GF = DF$.



Számítsátok ki:
a) az $ABCD$ téglalap területét;
b) az ADF, AGB, ACE háromszögek területét;
c) az $ADFE$, $AFGE$, $BCFA$, $ABCG$, $BEDF$ négyszögek területét.

14. Az $ABCD$ derékszögű trapéz alapjai $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm és $A\sphericalangle = 45°$.
a) Határozzátok meg a trapéz magasságának hosszát.
b) Számítsátok ki a trapéz területét és az ADC háromszög területét.

15. Egy trapéz területe 400 dm², az alapok aránya $\frac{1}{3}$, és magassága egyenlő az alapok számtani közepével. Számítsátok ki a trapéz alapjainak és magasságának hosszát.

16. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, és O az átlók metszéspontja. Bizonyítsátok be, hogy az AOD és BOC háromszögek területe megegyezik.

17. Az $ABCD$ paralelogrammát a PQ egyenes két ekvivalens (egyenlő területű) felszínre osztja, ($P \in AB$, $Q \in CD$). Bizonyítsátok be, hogy az $ADQP$ és $BCQP$ négyszögek kerülete megegyezik.

18. Az M pont az $ABCD$ téglalap belsejében helyezkedik el. Igazoljátok, hogy:

$$\mathcal{T}_{MAB} + \mathcal{T}_{MDC} = \mathcal{T}_{MAD} + \mathcal{T}_{MBC} = \frac{1}{2}\mathcal{T}_{ABCD}.$$

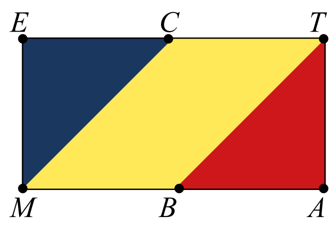
Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont jár.

I. *Az alábbiak közül válasszátok ki azt a betűt, amely a helyes választ jelöli; csak egyetlen válasz helyes.*

5p	**1.** Az ABC háromszögben AD és BE magasság. Ha $BC = 25$ cm, $AC = 15$ cm, $AD = 12$ cm, akkor $BE =$: A. 12 cm B. 18 cm C. 20 cm D. 16 cm
5p	**2.** Ha egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogójának hossza 24 cm, akkor a területe egyenlő: A. 128 cm^2 B. 132 cm^2 C. 136 cm^2 D. 144 cm^2
5p	**3.** Az $ABCD$ négyzetben M és N az AB illetve AD oldal felezőpontja és $CD = 20$ cm. A $BCNM$ négyszög területe egyenlő: A. 200 cm^2 B. 220 cm^2 C. 240 cm^2 D. 250 cm^2
5p	**4.** Az $ABCD$ téglalap területe 100 cm^2 és $AB = 2 \cdot BC$. A téglalap kerülete egyenlő: A. $20\sqrt{2}$ cm B. $30\sqrt{2}$ cm C. $25\sqrt{2}$ cm D. $15\sqrt{2}$ cm
5p	**5.** A $DEFG$ négyszögben $DE \parallel FG$, $DG \parallel EF$, $DE = 14$ cm, $EF = 6$ cm, $DEF\sphericalangle = 150^\circ$. A négyszög területe egyenlő: A. 21 cm^2 B. 28 cm^2 C. 42 cm^2 D. 84 cm^2
5p	**6.** Egy derékszögű trapéz alapjainak hossza 5 cm illetve 9 cm és az egyik szögének mértéke 45°. A trapéz területe: A. 38 cm^2 B. 28 cm^2 C. 42 cm^2 D. 84 cm^2
5p	**7.** Az $ABCD$ téglalap területe 320 cm^2 és P az AB oldalon egy pont. A PCD háromszög területe egyenlő: A. 160 cm^2 B. 180 cm^2 C. 144 cm^2 D. 140 cm^2
5p	**8.** Egy rombusz területe 6 cm^2 és az átlók hossza, centiméterben kifejezve, két egymásutáni természetes szám. A rombusz kerülete egyenlő: A. 20 cm B. 15 cm C. 10 cm D. 12 cm

II. *Az alábbi feladatokhoz teljes megoldás szükséges.*

 10p **10p**	**1.** A $MATE$ téglalap kerülete 144 cm. Dávid befestette ezt a téglalapot, ahogy a mellékelt ábrán látható, három színnel: kékkel, sárgával és pirossal. Tudjuk, hogy B és C az MA illetve ET felezőpontja és $AB = ME$. Számítsd ki: a) a sárgára festett rész területét; b) a téglalap területének hány százaléka a nem kékkel befestett rész területe? 
15p	**2.** Adott a $CDEF$ paralelogramma, ahol $CE \cap DF = \{O\}$. A d egyenes átmegy az O ponton és metszi a CD és EF oldalakat a P illetve Q pontokban. Igazold, hogy $\mathcal{T}_{CPOF} = \mathcal{T}_{EQOD}$.
 10p **5p**	**3.** Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm és a trapéz magassága 4 cm. Az M, N és P pont az AB, BC illetve AD oldal felezőpontja. Számítsd ki: a) az $ABNP$ és $CDPN$ négyszög területét; b) a CMP háromszög területét.

5 A kör

5.1. Kerületi szög. Külső pontból húzott érintők
5.2. Körbe írt szabályos sokszögek
5.3. A kör kerülete és a körlap területe

Sajátos kompetenciák:

1.5. 2.5. 3.5. 4.5. 5.5. 6.5.

5.1. Kerületi szög. Külső pontból húzott érintők

1.ℓ. Körív és húr

El tudnátok-e képzelni a mindennapi életet kör alakú tárgyak nélkül?
London kihagyhatatlan attrakciója a „*London Eye*". Az óriáskerék átmérője 120 méter, rajta 32 zárt, légkondicionált utasfülke van, amelyek a kerék külső széléhez vannak rögzítve. A fülkéket 1-től 33-ig számozták meg, a 13-as számot átugrották.

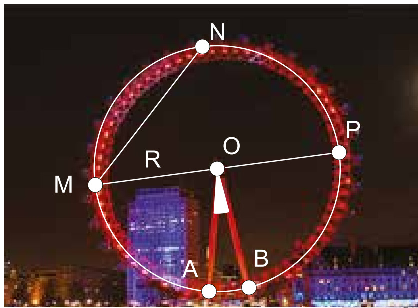


Fig. 1

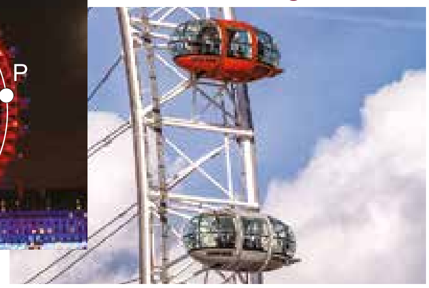


Fig. 2

Emlékeztető

1) **A kör** a sík azon pontjainak halmaza, amelyek egyenlő távolságra vannak egy rögzített ponttól, amit a kör középpontjának nevezünk. A kör középpontját általában O-val jelöljük.
2) A kör középpontja és egy tetszőleges pontja közötti távolságot a kör **sugarának** nevezzük, és R-rel vagy r-rel jelöljük.

Példa:
Az 1. ábrán a rögzített O ponttól R távolságra található pontok alkotják az O középpontú, R sugarú kört. A kört így jelöljük: $\mathcal{C}(O, R)$.
A körön megjelöltük az A, B, M, N és P pontot.
$AO = BO = MO = NO = PO = r$.

3) A kör két pontját összekötő szakaszt **húrnak** nevezzük.
Az olyan húrt, amely tartalmazza a kör középpontját, **átmérőnek** nevezzük.

Példa: Az 1. ábrán MN és MP két húr.
MP húr és $O \in MP$, tehát MP átmérő.
$MP = d = MO + ON = 2 \cdot r$.

4) A kör azon részét, amely egy húr tartóegyenesének egyik oldalán helyezkedik el, és a húr végpontjait is tartalmazza, körívnek nevezzük.
A kör bármely két különböző pontja meghatároz a körön két körívet.
Ha meg szeretnénk különböztetni a két azonos végpontú **körívet**, jelölhetjük őket három betűvel.

Példa: Az M és N pont két körívet határoz meg: egy nagy körívet és egy kis körívet.
Rendszerint $\overset{\frown}{MN}$ -nel a kis körívet jelöljük.
Az M és N végpontú nagy körív tartalmazza az A, B és P pontot, ezért a nagy körívet így jelölhetjük $\overset{\frown}{MPN}$, $\overset{\frown}{MAN}$ vagy $\overset{\frown}{MBN}$.

5) Egy átmérő két egyforma körívet határoz meg, ezeket **félköröknek** nevezzük.

Az MP átmérő meghatározza az $\overset{\frown}{MNP}$ és $\overset{\frown}{MAP}$ félköröket.

6) Egy olyan szöget, amelynek csúcsa a kör középpontjában van, **középponti szögnek** nevezünk.

Példa: $AOB\sphericalangle$ középponti szög.

7) Ha A és B a kör két tetszőleges pontja, akkor az $\overset{\frown}{AB}$ kis körív mértéke egyenlő a hozzá tartozó középponti szög mértékével.

Példa: $\overset{\frown}{AB} = AOB\sphericalangle$.
$\overset{\frown}{MP} = 180°$, mivel MP a kör átmérője.

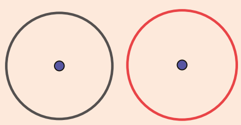
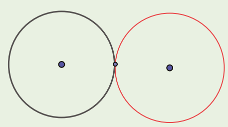
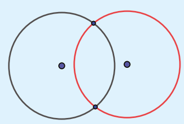
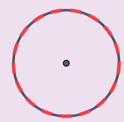
Fedezzük fel, értsük meg!

Eszter és Petra nézi a London Eye óriáskereket, és beszélgetnek:

– Petra, ha az M pontban található a 8-as fülke, az N pontban pedig a 17-es fülke, mennyivel egyenlő az $\overset{\frown}{MN}$ kis körív mértéke?
– Értem, Eszter, ki akarod próbálni, tudom-e, hogy az óriáskeréken nincs 13-as fülke, azaz a 8-as és 17-es között 7 fülke van 8 helyett.
– Bravó! Azt jelenti, hogy a 8-assal és 17-essel együtt 9 fülkét kell figyelembe vennünk. Ezek összesen 8 kongruens szöget határoznak meg, mindegyik mértéke egyenlő a teljes kör 32-ed részével.
– Helyes, akkor számoljunk! $360 : 32 = 11{,}25$. Ez azt jelenti, hogy két szomszédos fülke által meghatározott középponti szög mértéke $11°15'$. Tehát az $\overset{\frown}{MN}$ kis körív mértéke $8 \cdot 11°15' = 90°$.
– Mit gondolsz, Eszter, ki tudják számolni az osztálytársaink, hányas számú a P pontnál található fülke? Figyeljétek meg az ábrát, határozzátok meg a P pont helyzetét, végezzétek el a szükséges számításokat és válaszoljatok a barátnők kérdésére!

1. értelmezés. Az egyenlő sugarú köröket ***kongruens köröknek (egybevágó köröknek)*** nevezünk.

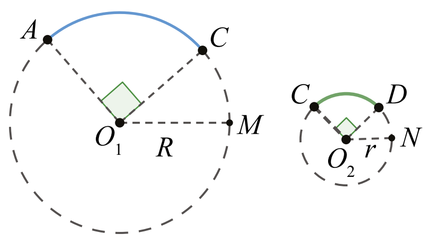
Két kongruens kör kölcsönös helyzete:

külső körök	kívülről érintő körök	metsző körök	egybeeső körök (koncentrikus, kongruens körök)
			

2. értelmezés. Egy körben vagy két kongruens körben két körív kongruens, ha a mértékük egyenlő. Jelölés $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.

Megfigyelés:
Annak, hogy két körív kongruens legyen egymással, nem elégséges feltétele, hogy a húrok mértéke egyenlő legyen. Lényeges feltétel az is, hogy a körívek ugyanahhoz a körhöz, vagy kongruens körökhöz tartozzanak.

A mellékelt ábrán $\overset{\frown}{AB} = 90°$ és $\overset{\frown}{CD} = 90°$ de a két körív még-sem kongruens egymással



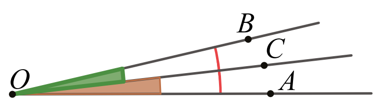
Alkalmazás

1. tétel. Ha A, B és C a $\mathcal{C}(O, r)$ kör három pontja és $C \in \overset{\frown}{AB}$, akkor $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.

$C \in AB$

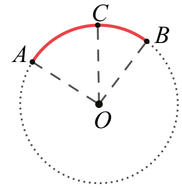
$AB = AC + CB$

$C \in Int\,(AOB\sphericalangle)$



$AOB\sphericalangle = AOC\sphericalangle + COB\sphericalangle$

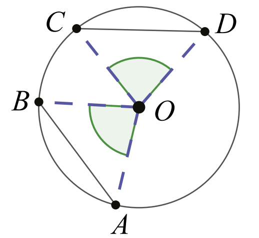
$C \in \overset{\frown}{AB}$



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$

2. tétel.
1) Ugyanabban a körben vagy kongruens körökben, kongruens húrokhoz kongruens körívek tartoznak.
2) Ugyanabban a körben vagy kongruens körökben, kongruens körívekhez kongruens húrok tartoznak.

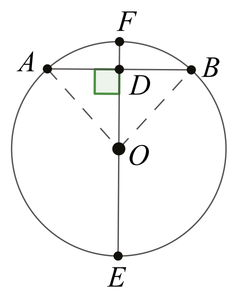
Bizonyítás.



1) A feltételnek megfelelően a $\mathcal{C}(O, r)$ körben A, B, C és D négy pont, és $AB \equiv CD$. Az OAB és OCD háromszögben $OA \equiv OB \equiv OC \equiv OD$ (a kör sugarai), továbbá $AB \equiv CD$ (feltétel szerint). Következik, hogy $OAB\Delta \equiv OCD\Delta$ (O.O.O. kritérium), tehát $AOB\sphericalangle \equiv COD\sphericalangle$ és $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.
2) Ha $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$ és $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$, akkor $AOB\sphericalangle \equiv COD\sphericalangle$. Az $OAB\Delta$ és $OCD\Delta$ háromszögben $AO \equiv CO$, $BO \equiv DO$. Az O.Sz.O. egybevágósági kritérium szerint $OAB\Delta \equiv OCD\Delta$, tehát $AB \equiv CD$.

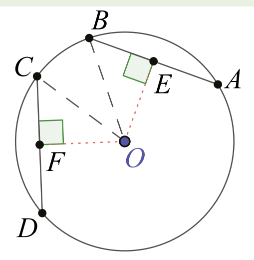
3. tétel.
1) Ha egy kör valamely átmérője merőleges egy húrra, akkor a húrt és a hozzá tartozó két körívet (a kis körívet és a nagy körívet) kongruens részekre osztja.
2) Ha egy kör valamely átmérője egy húrt vagy a húrhoz tartozó köríveket kongruens részekre osztja, akkor az átmérő merőleges a húrra.

Bizonyítás. AB a húr, EF az átmérő: $A, B, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$, $O \in EF$ és $EF \cap AB = \{D\}$.



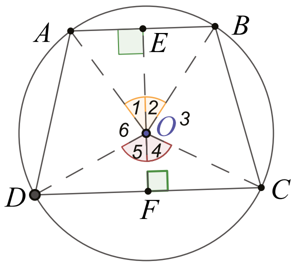
1) Ha $EF \perp AB$, akkor az ADO és BDO háromszögek derékszögűek és kongruensek egymással (átfogó-befogó eset): $OD \equiv OD$ (a kör sugarai) és $AO \equiv BO$ (közös oldal). Következik, hogy $AD \equiv DB$ és $AOD\sphericalangle \equiv BOD\sphericalangle$, tehát $\overset{\frown}{AF} \equiv \overset{\frown}{FB}$. Az $\overset{\frown}{EAF}$ és $\overset{\frown}{EBF}$ körívek félkörök, ezért $\overset{\frown}{AE} = 180° - \overset{\frown}{AF} = 180° - \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{BE}$.
2) A feltétel szerint az EF átmérő tartalmazza az AB húr D felezőpontját vagy az AB húr által meghatározott valamely körív felezőpontját. Ennek megfelelően, az AOB egyenlő szárú háromszögben az OD az alaphoz tartozó oldalfelező vagy a szárak által meghatározott szög szögfelezője. Mindkét esetben az OD az AOB háromszög AB alapjához tartozó magassága. Következik, hogy $OD \perp AB$, vagyis $EF \perp AB$, tehát az átmérő merőleges a húrra.

4. tétel. Egy kör két húrja akkor és csakis akkor kongruens egymással, ha a kör középpontjától egyenlő távolságra helyezkednek el.



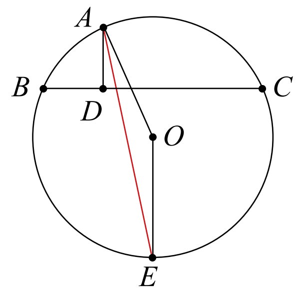
Bizonyítás. $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O,\ r)$, $OE \perp AB$, $E \in AB$ és $OF \perp CD$, $F \in CD$.
OE és OF merőlegesek a húrokra, ezért a 3. tétel szerint E és F az AB illetve CD húr felezőpontja: $AB = 2 \cdot BE$ és $CD = 2 \cdot CF$.
Ha $AB \equiv CD$, akkor $BE \equiv CF$ és $BEO\Delta \equiv CFO\Delta$ (átfogó-befogó eset). Következik, hogy $OE \equiv OF$, tehát $d(O, AB) = d(O, CD)$.
Fordítva, ha $d(O, AB) = d(O, CD)$, vagyis $OE \equiv OF$, akkor $BEO\Delta \equiv CFO\Delta$ (átfogó-befogó eset). Következik, hogy $BE \equiv CF$, tehát $AB \equiv CD$.

5. tétel. Egy körön, két párhuzamos egyenes között található húrok kongruensek egymással.



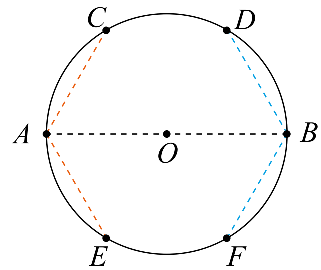
Bizonyítás. A, B, C, D négy pont a $\mathcal{C}(O, r)$ körön úgy, hogy $AB \parallel CD$.
Segédszerkesztés: $OE \perp AB$ és $OE \cap AB = \{F\}$. Mivel $AB \parallel CD$ következik, hogy $OF \perp DC$. Az ABO és CDO háromszögek egyenlő szárúak ($OA = OB = OC = OD = r$), OE illetve OF, az alapokhoz tartozó magasságok, tehát szögfelezők is. Következik, hogy $O_1\sphericalangle \equiv O_2\sphericalangle$ és $O_4\sphericalangle \equiv O_5\sphericalangle$.
Az OE és OF félegyenesek ellentétesek, tehát $O_3\sphericalangle = 180° - O_2\sphericalangle - O_4\sphericalangle =$
$= 180° - O_1\sphericalangle - O_5\sphericalangle = O_6\sphericalangle$. Az O.Sz.O. egybevágósági eset szerint $OBC\Delta \equiv OAD\Delta$, tehát $BC \equiv AD$ és $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{AD}$ amit igazolni kellett.

1. alkalmazás. Adott a $\mathcal{C}(O, r)$ körön három pont: A, B, C, továbbá $AD \perp BC$, $D \in BC$. Meghúzzuk a $DAO\sphericalangle$ szögfelezőjét, mely E-ben metszi a kört. Igazoljuk, hogy $\overset{\frown}{BE} \equiv \overset{\frown}{CE}$.



Bizonyítás. $AOE\Delta$ egyenlő szárú ($AO = OE = r$) tehát $EAO\sphericalangle \equiv AEO\sphericalangle$.
AE szögfelezője $DAO\sphericalangle$ és $EAO\sphericalangle \equiv EAD\sphericalangle$.
Következik, hogy $AEO\sphericalangle \equiv EAD\sphericalangle$, tehát $EO \parallel AD$.
Mivel $AD \perp BC$, következik, hogy $EO \perp BC$. Az EO egyenes tartalmazza a kör átmérőjét, tehát a $\overset{\frown}{BC}$ körívet két kongruens részre osztja: $\overset{\frown}{BE} \equiv \overset{\frown}{CE}$.

2. alkalmazás. Az O középpontú, AB átmérőjű körön felvesszük a C és D pontot az átmérő egyik oldalán, az E és F pontot az átmérő másik oldalán úgy, hogy teljesüljenek az $AC \equiv AE$ és $BD \equiv BF$ feltételek. Igazoljuk, hogy $\overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{EF}$ és $d(O, CD) = d(O, EF)$.



Bizonyítás. Kongruens húrokhoz kongruens körívek tartoznak.
Mivel $AC \equiv AE$ és $BD \equiv BF$ következik, hogy $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{AE}$, és $\overset{\frown}{BD} \equiv \overset{\frown}{BF}$. Az átmérő a kört félkörökre bontja, tehát $\overset{\frown}{CD} = 180^\circ - \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD} = 180^\circ - \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{EF}$, vagyis $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF}$.

A $\overset{\frown}{CD}$ és $\overset{\frown}{EF}$ körívek ugyanazon körön vannak, tehát kongruensek egymással. A *2. tétel* szerint a hozzájuk tartozó húrok kongruensek: $CD \equiv EF$. Ezután alkalmazzuk a 4. tételt, amely szerint, a CD és EF kongruens húrok a kör középpontjától egyenlő távolságra helyezkednek el: $d(O,CD) = d(O,EF)$

Jegyezd meg!

1) Ugyanabban a körben vagy kongruens körökben, kongruens húrokhoz kongruens körívek tartoznak.
2) Ugyanabban a körben vagy kongruens körökben, kongruens körívekhez kongruens húrok tartoznak.
3) Ha egy kör valamely átmérője merőleges egy húrra, akkor a húrt és a hozzá tartozó két körívet (a kis körívet és a nagy körívet) kongruens részekre osztja.
4) Ha egy kör valamely átmérője egy húrt vagy a húrhoz tartozó valamely köríveket kongruens részekre osztja, akkor merőleges a húrra.
5) Egy kör két húrja akkor és csakis akkor kongruens egymással, ha a kör középpontjától egyenlő távolságra helyezkednek el.
6) Egy körön, két párhuzamos húr között található húrok kongruensek egymással.

Gyakorlatok, feladatok

1. Rajzoljatok egy O középpontú kört és ábrázoljatok rajta az A, B és C pontot!
a) Nevezzétek meg a pontok által meghatározott köríveket és húrokat!
b) Nevezzétek meg azt a középponti szöget, amely tartalmazza a B és C pontot!

2. Rajzoljatok egy kört és vegyétek fel rajta az A, B és C pontot úgy, hogy teljesüljenek az $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ és $\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$ feltételek.
Számítsátok ki az $\overset{\frown}{AC}$ kis körív mértékét.
Vizsgáljatok minden lehetőséget!

3. Rajzoljatok egy O középpontú kört és vegyétek fel rajta az A, B és C pontot úgy, hogy az $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ és $\overset{\frown}{CA}$ körív mértéke 50°, 150° illetve 160° legyen. Határozzátok meg az alábbi kijelentések logikai értékét:
a) $O \in AC$.
b) Az $\overset{\frown}{AC}$ nagy körív mértéke 200°.
c) $AOC\sphericalangle = 80^\circ$.
d) Az AOB háromszög egyenlő szárú.

4. Szerkesszetek a $\mathcal{C}(O, r)$ kör adott A belső pontján át BC húrt, amelynek A a felezőpontja!
a) Írjátok le a szerkesztés menetét!
b) Ha $BC = r$, számítsátok ki az OBC szög mértékét és a $\overset{\frown}{BC}$ kis körív mértékét!

5. Ha AB a $\mathcal{C}(O, r)$ kör átmérője, AC és AD kongruens húrok, igazoljátok, hogy:
a) $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{BD}$; b) $AB \perp CD$.

6. A $\mathcal{C}(O, r)$ körben $AB = 6$ cm és $CD = 12$ cm két húr. A húroknak nincs közös pontjuk és 6 cm illetve 3 cm távolságra helyezkednek el a kör középpontjától. Bizonyítsátok be, hogy $ABO\sphericalangle + BAO\sphericalangle = COD\sphericalangle$!

7. A $\mathcal{C}(O, r)$ körben az AB és CD húrok merőlegesek egymásra és P-ben metszik egymást. Jelöljük E-vel és F-fel a két húr felezőpontját. Igazoljátok, hogy $EF = OP$!

8. Az $ABCD$ paralelogramma A, B és C csúcsa a $\mathcal{C}(O, r)$ körön helyezkedik el. A kör és a CD oldal E-ben metszi egymást. Igazoljátok, hogy az ADE háromszög egyenlő szárú!

9. A $\mathcal{C}(O, r)$ kör sugara $r = 12$ cm, a körön található A, B, C és D pontok úgy helyezkednek el, hogy AB átmérő, $\overset{\frown}{CAD} = 120°$ és $CD \perp AB$.
a) Igazoljátok, hogy az OCD és ACD háromszög egyenlő szárú!
b) Határozzátok meg az $\overset{\frown}{AC}$ és $\overset{\frown}{BD}$ húr mértékét!
c) Számítsátok ki a B pont távolságát a CD egyenestől!

10. Az A, B, C, D és E pont a $\mathcal{C}(O, r)$ körön helyezkedik el úgy, hogy az $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EA}$ körívek közül semelyik kettőnek nincs közös belső pontja. Tudjuk, hogy $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{AE} = 120°$ és $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 2 \cdot \overset{\frown}{BC}$.
a) Határozzátok meg az öt körív mértékét!
b) Igazoljátok, hogy az $ACE\Delta$ háromszög egyenlő oldalú!

2.ℓ. Kerületi szög

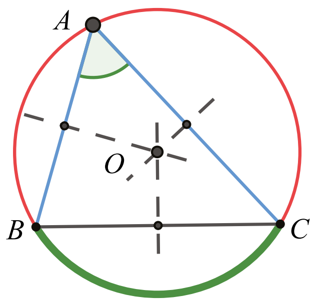
Mielőtt a kört tanulmányoztuk, a geometriai ismereteink többnyire a háromszögekre vonatkoztak. A mértani alakzatok tulajdonságainak felfedezése és bizonyítása újabb módszerekkel bővül a kör értelmezése és tulajdonságainak leírása révén.

Emlékeztető

1) Egy szakasz felezőmerőlegesének bármely pontja egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól.
2) Egy háromszög felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást, amelyet rendszerint O-val jelölünk.

Fedezzük fel, értsük meg!

A mellékelt ábrán megszerkesztettük az ABC háromszög oldalfelező merőlegeseit és a kört, amely átmegy a háromszög csúcsain. Azonosítsuk a háromszög és a kör elemeit és vizsgáljuk a köztük fennálló kapcsolatokat!

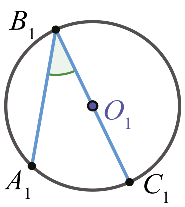


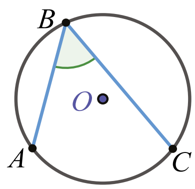
1) A kör középpontja O és $OA = OB = OC = r$.
2) Az ABC háromszög oldalai egyben a kör húrjai.
3) Minden oldal meghatároz egy kis körívet és egy nagy körívet.
4) A háromszög szögeinek csúcsai a körön helyezkednek el.
5) A háromszög minden szögének belső tartományában a szemben fekvő oldal által meghatározott két körív egyike található.

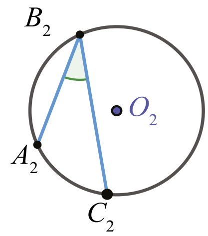
Értelmezés. Egy olyan szöget, amelynek csúcsa egy körön helyezkedik el, szárai pedig a kör húrjai, **kerületi szögnek** nevezünk.

Három eset lehetséges:

1) A kör középpontja a szög egyik szárán található.	2) A kör középpontja a szög belső tartományában található.	3) A kör középpontja a szög külső tartományában található.



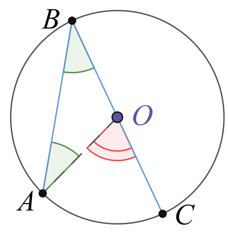




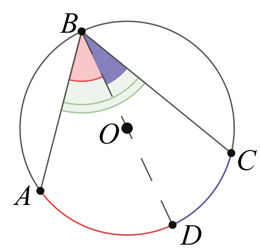
Tétel. Egy kerületi szög mértéke egyenlő a szárai által közrezárt körív mértékének felével.

Bizonyítás. A kerületi szögnek csupán az értelmezését ismerjük. Tudjuk viszont, hogy egy középponti szög mértéke egyenlő a szárai által közrezárt körív mértékével. Ezt a tulajdonságot használjuk fel.
Jelöljük ABC-vel a kerületi szöget, O-val a kör középpontját és r-rel a sugarát.

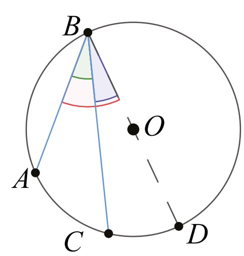
1) Tekintsük először azt az esetet, amikor a kör középpontja a szög egyik szárán helyezkedik el, pl. a BC száron. Ebben az esetben BC a kör átmérője $OA = OB = r$, következik, hogy az $AOB\Delta$ egyenlő szárú és $BAO\sphericalangle \equiv ABO\sphericalangle$. Az AOB háromszögnek az $AOC\sphericalangle$ külső szöge, tehát: $AOC\sphericalangle = BAO\sphericalangle + ABO\sphericalangle = 2 \cdot ABO\sphericalangle = 2 \cdot ABC\sphericalangle$.
Mivel $AOC\sphericalangle$ középponti szög, mértéke egyenlő az $\overset{\frown}{AC}$ kis körív mértékével.
Ebből következik, hogy $ABC\sphericalangle = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.



2) Ha O az $ABC\sphericalangle$ belső tartományában található, meghúzzuk a BD átmérőt. Ezáltal az ABC kerületi szöget két, egymás melletti szögre bontjuk, a kerületi szögnek megfelelő körívet pedig két körívre bontjuk. A keletkezett szögekre és körívekre alkalmazható az előző eset: $ABC\sphericalangle = ABD\sphericalangle + DBC\sphericalangle = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.



3) Ha O az $ABC\sphericalangle$ külső tartományában található, hasonlóan járunk el: meghúzzuk a BD átmérőt, majd alkalmazzuk az első esetet:
$ABC\sphericalangle = ABD\sphericalangle - DBC\sphericalangle = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

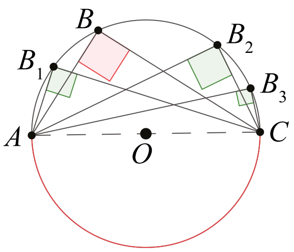


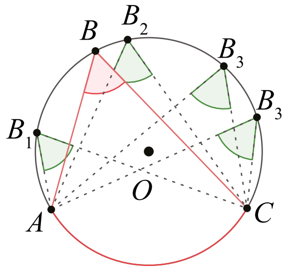
A fenti tétel alapján megfogalmazunk néhány fontos **következményt**.

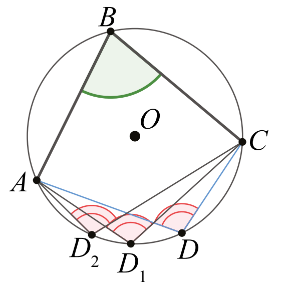
K_1: Bármely, félkörbe írt kerületi szög mértéke 90°.

K_2: Ha A, B és C egy kör három rögzített pontja, akkor az $\overset{\frown}{ABC}$ körív bármely B_n pontjára érvényes, hogy: $AB_nC\sphericalangle \equiv ABC\sphericalangle$

K_3: Ha A, B és C egy kör három rögzített pontja, akkor a kör minden olyan pontjára, amely nem az $\overset{\frown}{ABC}$ köríven található, érvényes, hogy: $ABC\sphericalangle + ADC\sphericalangle = 180°$.

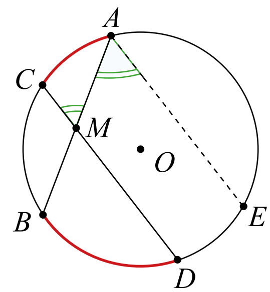






Igazoljátok az ábrák alapján a fenti kijelentéseket!

Alkalmazás



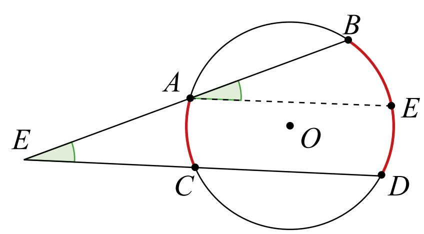
1. alkalmazás: Egy kör AB és CD húrja a kör M belső pontjában metszi egymást. Igazoljuk, hogy $AMC\sphericalangle = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}\right)$.

Megoldás. Segédszerkesztés: az A ponton keresztül meghúzzuk az AE párhuzamost a CD-hez. Az $\overset{\frown}{AC}$ és $\overset{\frown}{DE}$ körívek kongruensek egymással, mint párhuzamos húrok között található körívek. A belső váltószögek kongruensek egymással: $AMC\sphericalangle \equiv BAE\sphericalangle$. Mivel $BAE\sphericalangle$ kerületi szög, következik, hogy:

$$AMC\sphericalangle = BAE\sphericalangle = \frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{BDE} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DE}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}\right),$$

amit igazolni kellett.

2. alkalmazás. Egy kör AB és CD húrjának tartóegyenesei a körön kívül található N pontban metszik egymást. Igazoljuk, hogy $ANC\sphericalangle = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}\right)$.



Megoldás. az A ponton keresztül meghúzzuk az $AE \parallel CD$ húrt. A megfelelő szögek kongruensek egymással: $ANC\sphericalangle \equiv BAE\sphericalangle$.

Mivel $BAE\sphericalangle$ kerületi szög, következik, hogy:

$ANC\sphericalangle = BAE\sphericalangle = \frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{BE} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{DE}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}\right)$, amit igazolni kellett.

Jegyezd meg!

Kerületi szögnek nevezünk egy olyan szöget, amelynek a csúcsa egy körön fekszik, szárai pedig a körnek húrjai.
Egy kerületi szög mértéke egyenlő a szárai által közre zárt körív mértékének felével.

Gyakorlatok, feladatok

1. Rajzoljatok egy $\mathcal{C}(O, r)$ kört, válasszatok rajta három pontot és jelöljétek őket A-val, B-vel illetve C-vel.
a) Kössétek össze a pontokat és nevezzétek meg a $\mathcal{C}(O, r)$ körön keletkezett kerületi szögeket!
b) Ha $\overset{\frown}{AB} = 40°$, $\overset{\frown}{BC} = 100°$, számítsátok ki az $ABC\sphericalangle$, $BCA\sphericalangle$, $CAB\sphericalangle$ mértékét!

2. Az A, B és C pont a $\mathcal{C}(O, r)$ körön helyezkedik el, $O \in AB$. Határozzátok meg az $ABC\sphericalangle$, $BCA\sphericalangle$, $CAB\sphericalangle$ mértékét!

3. Adott az A, B, C és D pont az O középpontú körön úgy, hogy C és D az AB egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el, mint az O pont.
a) Igazoljátok, hogy $ACB\sphericalangle + ADB\sphericalangle = AOB\sphericalangle$!
b) Ha $\overset{\frown}{AB} = 70°$, számítsátok ki az $ACB\sphericalangle$ és $AOB\sphericalangle$ mértékét!

4. E, F, G, H ugyanazon az O középpontú körön helyezkedik el úgy, hogy G és H az EF egyenes különböző oldalán található.
a) Számítsátok ki az $EGF\sphericalangle + EHF\sphericalangle$ összeget!
b) Ha $\overset{\frown}{EF} = 80°$, határozzátok meg az $EHF\sphericalangle$, $EOF\sphericalangle$ és $EGF\sphericalangle$ mértékét! Vizsgáljátok mindkét lehetséges esetet: ha G az EF kis köríven, vagy ha G az EF nagy köríven helyezkedik el!

5. Az A pont az $r = 6$ cm sugarú $\mathcal{C}(O, r)$, körön található. Az OA szakasz felezőmerőlegese a kört B-ben és C-ben metszi.
a) Számítsátok ki az $ABOC$ négyszög kerületét!
b) Számítsátok ki a $BAC\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$ és $ACO\sphericalangle$ mértékét!

6. A DEF háromszög csúcsai a $\mathcal{C}(O, r)$, körön helyezkednek el, és az EDF szög szögfelezője a kört másodszor az M pontban metszi.
a) Igazoljátok, hogy $EFM\sphericalangle \equiv FEM\sphericalangle$!
b) Ha $\overset{\frown}{DE} = 90°$ és $\overset{\frown}{DF} = 150°$ számítsátok ki a DFM háromszög szögeinek mértékét!

7. A $\mathcal{C}(O, r)$ kör AB és AC sugarai merőlegesek egymásra és $ABO\sphericalangle \equiv BAO\sphericalangle = 80°$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeinek mértékét!

8. Az $MNPQ$ négyszög csúcsai a $\mathcal{C}(O, r)$ körön helyezkednek el és $\overset{\frown}{MN} \equiv \overset{\frown}{NP}$, $\overset{\frown}{MQ} \equiv \overset{\frown}{PQ}$.
a) Igazoljátok, hogy $O \in NQ$.
b) Tudva azt, hogy $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MQ} - 40°$, határozzátok meg az $MNPQ$ négyszög szögeinek mértékét!.

9. Az A, B és C pont a $\mathcal{C}(O, r)$, körön helyezkedik el és AB a kör átmérője. Az ACB szög szögfelezője a D pontban metszi a kört. Számítsátok ki:
a) a $\overset{\frown}{BD}$ kis körív mértékét!
b) az AOD szög mértékét!

10. Az ABC háromszög egyenlő szárú, $AB = AC$, és az A középpontú, $r < AB$, sugarú kör az AB és AC oldalakat a D illetve E pontban metszi.
a) Igazoljátok, hogy $DE \parallel BC$!
b) Számítsátok ki a $\overset{\frown}{DE}$ nagy körív mértékét, tudva azt, hogy $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ECB = 115°$.

11. A $\mathcal{C}(O, r)$ körben AB egy átmérő, C egy pont a körön, és M a $\overset{\frown}{BC}$ körív felezőpontja.
a) Igazoljátok, hogy $OM \parallel AC$!
b) Ha D a kör azon pontja, amelyre $BD \parallel OM$, bizonyítsátok be, hogy a C, D és O kollineáris pontok (egy egyenesen helyezkednek el).

12. A $\mathcal{C}(O, r)$, $r = 10$ cm körön található A, B és C pontok teljesítik a következő feltételeket: $AO \perp OB$, és C az $\overset{\frown}{AB}$ kis köríven helyezkedik el. C-ből merőlegest húzunk OA-ra és OB-re: $CM \perp OA$, $M \in OA$, illetve $CN \perp OB$, $N \in OB$. A CM egyenes a kört másodszor P-ben metszi, a CN egyenes pedig Q-ban.
a) Számítsátok ki az MN szakasz hosszát!
b) Igazoljátok, hogy a P, O és Q pontok kollineárisak!
c) Határozzátok meg az ACM szög mértékét abban az esetben, ha $CMON$ négyzet!

13. A $\mathcal{C}(O, r)$ körön az M és N pontok átmérősen ellentettek, P az M és N végpontú valamely körív középpontja. A PM szakasz felezőmerőlegese a $\overset{\frown}{PM}$ nagy körívet Q-ban metszi, a PN szakasz felezőmerőlegese a $\overset{\frown}{PN}$ nagy körívet R-ben metszi. Határozzátok meg a PQR háromszög szögeinek mértékét!

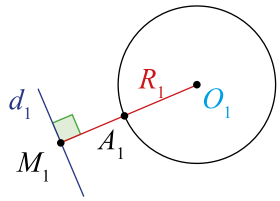
3.ℓ. Külső pontból húzott érintő

Emlékeztető

1) Adott A ponton végtelenül sok kör megy át.
2) Ha adott két pont, A és B, akkor végtelenül sok olyan kör létezik, amely tartalmazza mindkét pontot. Ezen körök középpontja az AB szakasz felezőmerőlegesén fekszenek.
3) Egy kör bármely három különböző pontja nem kollineáris (nem egy egyenesen fekszenek).
4) Ha adott három nem kollineáris pont, A, B és C, akkor egy és csakis egy kör létezik, amely mindhárom pontot tartalmazza. Az A, B és C nem kollineáris pontokat tartalmazó kört az ABC háromszög körülírt körének nevezzük, és ezen kör középpontja a háromszög oldalfelező merőlegeseinek a metszéspontja.
5) Egy egyenesnek és egy körnek legfeljebb két közös pontja lehet.

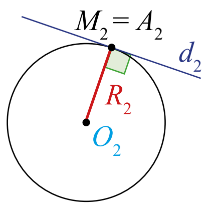
Egyenes és kör egymáshoz viszonyított helyzetei:

a kört nem metsző egyenes
(nincs közös pont)
$\mathcal{C}(O_1, R_1) \cap d_1 = \varnothing$



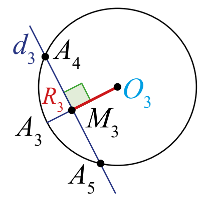
$d(O_1, d_1) > R_1$

a kört érintő egyenes
(egy közös pont)
$\mathcal{C}(O_2, R_2) \cap d_2 = \{A_2\}$



$d(O_2, d_2) = R_2$

a kört metsző egyenes
(két közös pont)
$\mathcal{C}(O_3, R_3) \cap d_3 = \{A_4, A_5\}$



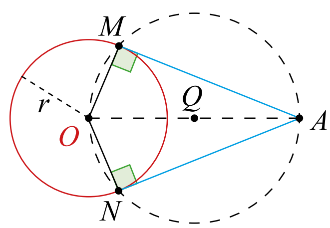
$d(O_3, d_3) < R_3$

Fedezzük fel, értsük meg!

1. tétel. A d egyenes akkor és csakis akkor érinti a $\mathcal{C}(O, r)$ kört az A pontban, ha $d \perp OA$.

Bizonyítás: Tekintsük a d egyenest, amely a $\mathcal{C}(O, r)$, kört az A pontban érinti. Ellentmondásra való visszavezetéssel (reductio ad absurdum) bizonyítjuk, hogy $d \perp OA$. Tételezzük fel az ellenkezőjét: d nem merőleges OA-ra. Akkor létezik egy B pont a d egyenesen, úgy, hogy $OB \perp d$, $B \in d$.
Mivel $OAB\sphericalangle = 90^\circ$ az OBA háromszög derékszögű, OA átfogó és OB befogó, tehát $OA > OB$. Az A pont a körön van, tehát a B pont a körön belül helyezkedik el, ezért a d egyenesnek van még egy pontja a körön az A-n kívül. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát a feltételezés hibás, következésképpen $d \perp OA$.
Másrészt, az OA egyenes A pontjában az OA egyenesre egyetlen d merőleges szerkeszthető, tehát ez a merőleges éppen az A pontban a körhöz húzott érintő kell legyen.
Egy kör adott pontján keresztül egyetlen érintő húzható a körhöz. Feltevődik a kérdés: létezik-e olyan pont a síkban, amelyen keresztül két érintő húzható ugyanahhoz a körhöz?

2. tétel. Egy $\mathcal{C}(O, r)$ körön kívül fekvő tetszőleges A ponton át két érintő szerkeszthető a körhöz: AM és AN. Az A pont és az érintési pontok által meghatározott szakaszok kongruensek.



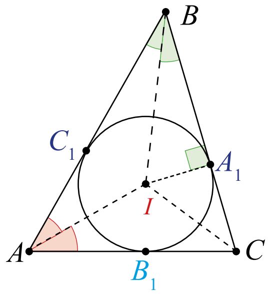
Bizonyítás: Mivel az A pont a $\mathcal{C}(O, r)$ körön kívül helyezkedik el, $OA > r$. Az A pontból húzott érintő és a kör közös pontját megkapjuk, ha szerkesztünk egy AO átfogójú derékszögű háromszöget, melynek a harmadik csúcsa (a derékszög) az adott körön található.
Tudjuk, hogy egy derékszög félkörbe írható, ezért megszerkesztjük az

AO átmérőjű kört. Jelöljük Q-val a középpontját, tehát sugara $R = \frac{OA}{2}$. Jelöljük M-mel és N-nel a két kör metszéspontjait, tehát $OMA\sphericalangle$ és $ONA\sphericalangle$ derékszögek mint félkörbe írt kerületi szögek. AM és AN a kör érintői. Az OAM és OAN derékszögű háromszögek kongruensek (OA közös oldal és $OM \equiv ON$, mint ugyanazon kör sugarai), tehát MA és NA kongruens befogók.

Az OAM és OAN háromszögek egybevágósága alapján kijelenthetünk még egy tulajdonságot, amely hasznos segédeszköz bizonyos feladatok megoldásában.
Egy körön kívül található pontot a kör középpontjával összekötő félegyenes a külső pontból húzható érintők által meghatározott szög szögfelezője. A 2. tételhez tartozó ábrán az AO félegyenes az $MAN\sphericalangle$ szögfelezője.

Alkalmazás

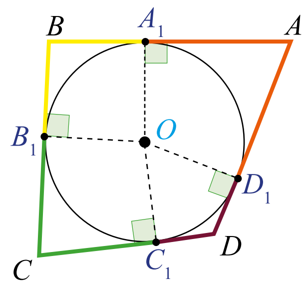
1. alkalmazás. Az ABC háromszögben $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. A háromszög szögfelezői az I pontban metszik egymást. A szögfelező minden pontja egyenlő távolságra található a szög száraitól, tehát I egyenlően távol fekszik a háromszög három oldalától. Jelöljük ezt a távolságot r-rel, tehát $d(I,AB) = d(I,BC) = d(I,AC) = r$.
Megszerkesztjük az I középpontú, r sugarú kört. Ezt a kört az *ABC háromszög* **beírt körének** nevezzük.
A háromszög oldalai érintik a beírt kört az $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, illetve $C_1 \in AB$ pontban. Számítsuk ki az AB_1, AC_1, BA_1, BC_1, CA_1, CB_1 szakaszok hosszát a, b, c és a háromszög félkerülete függvényében!



Megoldás. A háromszög oldalai érintik a kört. Alkalmazzuk a 2. tételt: $AB_1 \equiv AC_1$, $BC_1 \equiv BA_1$, és $CA_1 \equiv CB_1$. Bevezetjük az $AB_1 = x$, $BC_1 = y$ és $CA_1 = z$ jelöléseket.
A háromszög oldalai: $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ (1).
$ABC\Delta$ kerülete: $\mathcal{K} = 2x + 2y + 2z$, félkerülete $p = x + y + z$ (2).
Rendre kivonjuk a (2)-es azonosságból az (1)-es azonosságokat, és a következő eredményeket kapjuk $AB_1 = AC_1 = p - a$, $BC_1 = BA_1 = p - b$ és $CA_1 = CB_1 = p - c$.

2. alkalmazás. Az A külső pontból AA_1 és AD_1 érintőket húzunk a $\mathcal{C}(O, r)$, körhöz. Válasszunk egy C pontot az $A_1AD_1\sphericalangle$ belsejében, de a körön kívül, és szerkesszük meg a C pontból a körhöz húzott CB_1 és CC_1 érintőket (B_1 és C_1 az érintési pontok)! Újabb metszéspontok keletkeznek: $\{B\} = AA_1 \cap CB_1$ és $\{D\} = AD_1 \cap CC_1$.

a) Készítsétek el a mellékelt ábrát mértani felszerelés segítségével. Ügyeljetek az adatoknak megfelelő szerkesztésre!
b) Igazoljátok, hogy az $ABCD$ konvex négyszögben $AB + CD = BC + AD$.

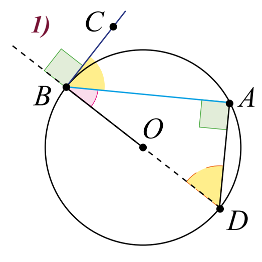


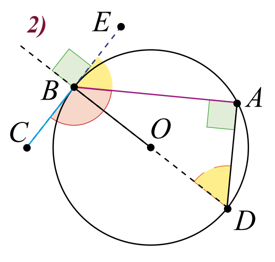
Megoldás. Az azonos színű szakaszok kongruensek, mivel külső pontból a körhöz húzott érintők. Ebből következik, hogy $AB + CD = BC + AD$.

Egy kis történelem:
A második alkalmazásban bebizonyított egyenlőséget Henri Pitot francia mérnök fedezte fel 1725-ben.
Henri Pitot 1695–1771 között élt.

Henri Pitot

3. alkalmazás. Az $ABC\sphericalangle$ szög csúcsa az O középpontú körön található, egyik szára a kör érintője, a másik pedig a kör egy húrja. Bizonyítsuk be, hogy az $ABC\sphericalangle$ mértéke egyenlő a szög belsejében található körív mértékének felével!
Bizonyítás. Az ABC szög BC szára B-ben érinti a kört, a BA szára pedig ugyanannak a körnek egy húrja. Három eset lehetséges: $ABC\sphericalangle$ hegyesszög, tompaszög vagy derékszög.



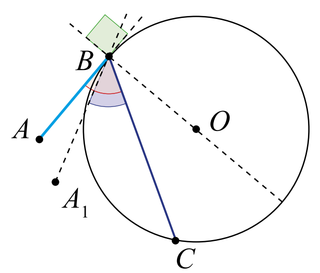


1) $ABC\sphericalangle$ hegyesszög. Mivel $OBC\sphericalangle = 90^\circ$, következik, hogy $O \notin Int(ABC\sphericalangle)$. Jelöljük D-vel a B átmérősen ellentett pontját, tehát $BAD\sphericalangle = 90^\circ$ (félkörbe írt kerületi szög). Az $ABC\sphericalangle$ és $ADB\sphericalangle$ pótszögei azonosak ($ABD\sphericalangle$), ebből következik, hogy kongruensek. $ADB\sphericalangle$ kerületi szög, tehát $ABC\sphericalangle = ADB\sphericalangle = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

2) $ABC\sphericalangle$ tompaszög, tehát a szög belsejében található körív az $\overset{\frown}{ADB}$ nagy körív.
Jelöljük BE-vel a BC ellentétes félegyenesét! Az $ABE\sphericalangle$ hegyesszög, egyik szára érintő, a másik húr, tehát alkalmazható rá az 1. eset. Következik, hogy: $ABC\sphericalangle = 180^\circ - ABE\sphericalangle = 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\left(360^\circ - \overset{\frown}{AB}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$.

3) $ABC\sphericalangle$ derékszög. Ebben az esetben AB húr éppen átmérője a körnek. Az $ABC\sphericalangle$ belsejében az $\overset{\frown}{AB}$ félkör található, ennek mértéke 180°, tehát $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 90^\circ = ABC\sphericalangle$ amit igazolni kellett.

4. alkalmazás. Az ABC szög B csúcsa egy körön található, és BC szára a kör egyik húrja. Ha $ABC\sphericalangle = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$, akkor AB a kör érintője, és B-ben érinti a kört.

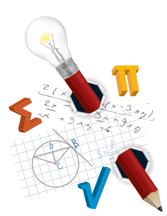


Bizonyítás. Tételezzük fel az ellenkezőjét (red. ad abs.): AB nem érinti a kört B-ben. Akkor létezik egy BA_1 egyenes, amely érinti a kört B-ben. Az előző alkalmazás szerint: $A_1BC\sphericalangle = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = ABC\sphericalangle$. Ebből következik, hogy a BA és BA_1 egyenesek egybeesnek, tehát AB érinti a kört B-ben.

A 4. alkalmazás alapján gyakran igazolni lehet, hogy egy egyenes érintője egy körnek: *ha egy szög csúcsa a körön található, mértéke egyenlő a belső tartományában elhelyezkedő körív mértékének felével, és a szög egyik szára a kör húrja, akkor a szög másik szára a kör érintője.*

! **Jegyezd meg!**

- Három nem kollineáris ponton át egy és csakis egy kör fektethető.
- Egy egyenesnek és egy körnek legfeljebb két közös pontja van.
- Egy egyenes akkor és csakis akkor érintője egy körnek, ha merőleges egy sugárra, amelynek tartóegyenesével a körön metszik egymást.
- A $\mathcal{C}(O, r)$ kör bármely külső A pontjából át két érintő húzható a körhöz. Az A pont és az érintési pontok által meghatározott szakaszok kongruensek egymással.



Gyakorlatok, feladatok

1. Készítsétek el az alábbi kijelentéseknek megfelelő ábrákat, és írjátok le matematikai jelekkel a kör sugarának és középpontjának az egyenestől mért távolsága közti relációt:

a) az A középpontú kör sugara r_1 és az a egyenes nem metszi a kört;

b) a B középpontú kör sugara r_2 és a b egyenes érinti a kört;

c) a C középpontú kör sugara r_3 és a c egyenes két pontban metszi a kört.

2. Rajzoljatok egy $\mathcal{C}(O, r)$ kört és vegyetek fel egy A pontot a körön kívül! Húzzatok három egyenest az A ponton keresztül: egyet, amely nem metszi a kört, egy érintőt és egy metsző egyenest! Jelöljétek meg az egyenesek és a kör közös pontjait, majd írjátok le az egyenesek és a kör közös pontjainak halmazát!

3 Rajzoljatok egy O középpontú, $r = 3$ cm sugarú kört! Rögzítsetek egy A pontot a körön és szerkesszétek meg a TA érintőt a körhöz! Egészítsétek ki az alábbi kijelentéseket:

a) $\sphericalangle TAO = \ldots^\circ$;

b) $d(O, TA) = \ldots = \ldots$ cm.

4. Tudjuk, hogy a $\mathcal{C}(O, r)$ kör sugara $r = 0{,}4$ dm és d egy egyenes a síkban. Az O pont távolsága a d egyenestől, centiméterben kifejezve $x \in \mathbb{N}, x < 10$. Mondjatok példát x lehetséges értékére, ha a d egyenes:

a) nem metszi a kört;

b) érinti a kört;

c) metszi a kört!

5. M egy pont a $\mathcal{C}(O, r)$ körön, $r = 3$ cm és és T egy pont a körön kívül. Tudjuk, hogy $TM = 4$ cm és $TO = 5$ cm. Milyen helyzetű a TM egyenes a $\mathcal{C}(O, r)$ körhöz viszonyítva?

6. Az A pont a $\mathcal{C}(O, r)$ körön kívül helyezkedik el, AB érinti a kört, B a körön található, $OA = 18$ cm és $OAB\sphericalangle = 30°$. Határozzátok meg a kör sugarát!

7. A $\mathcal{C}(O, r)$, körön kívül található B ponton keresztül meghúzzuk a BC és BD érintőket, $C, D \in \mathcal{C}(O, r)$. Tudjuk, hogy $OB = 16$ cm és a COD háromszög egyenlő oldalú. Számítsátok ki:

a) BC és BD hosszát;

b) a B pont távolságát a CD egyenestől!

8. Az A, B és C pontok egy körön fekszenek és $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{AC}$. Igazoljátok, hogy a körhöz az A pontban húzott érintő párhuzamos a BC egyenessel!

9. Az $\overset{\frown}{AB} = 72°$-os körívet tartalmazó körhöz az A-ban húzott érintő, az AB szakasz felezőmerőlegesét C-ben metszi.

a) Igazoljátok, hogy a CB egyenes a kör érintője!

b) Számítsátok ki az ACB szög mértékét!

10. Az O középpontú, 8 cm sugarú körön található A és B pont által meghatározott körív mértéke $\overset{\frown}{AB} = 120°$. Az A és B pontban érintőket húzunk a körhöz, ezek T-ben metszik egymást.

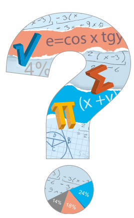
a) Határozzátok meg a TO szakasz hosszát!

b) Ha $AB \cap OT = \{D\}$, igazoljátok, hogy $TD = 3 \cdot DO$.

11. A $\mathcal{C}(O, r)$ kör AB és AC érintői merőlegesek egymásra, B és C az érintési pontok. Az AO egyenes a kört D-ben illetve E-ben metszi.

a) Határozzátok meg a $BDCE$ négyszög szögeinek mértékét!

b) Igazoljátok, hogy a D és E pontban a körhöz húzott érintők párhuzamosak a BC egyenessel!



5.2. Körbe írt szabályos sokszögek

Az ember a legrégibb időktől igényli a szépet. A természetben is számos különösen szabályos és szép alakzatot fedezhetünk fel. Tekintsük az alábbi képeket:





Mindegyiken megfigyelhetjük a szinte tökéletes, stilizált, körszerű alakzatokat, melyek egyenlő részekre tagolódnak, jellegzetes szimmetriát hozva létre.

Egy kis történelem

Már az ókori geométerek is tanulmányozták, hogy miképpen lehet felosztani a kört n egyenlő részre csupán körző és beosztás nélküli vonalzó segítségével. Ismerték a megoldást, ha $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$, általánosabban, ha $n = 2^a$ (ahol a nullától különböző természetes szám), ha $n = 3$, $n = 5$, ha n két vagy több ilyen szám szorzata.
Karl Friedrich Gauß (Gauss) nagy feltűnést keltett 1796-ban, amikor elsőként közölte az $n = 17$ esetére vonatkozó megoldást.
A *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) c. művében további, addig ismeretlen eseteket is megoldott

Karl Friedrich Gauß

Emlékeztető

Az egyenlő oldalú háromszögben *minden oldal* és *minden szög* kongruens egymással.
A négyzet *minden oldala* és *minden szöge* kongruens egymással.
Kérdések:
1) Van-e más sokszög, amelyben minden oldal és minden szög kongruens egymással?
2) Melyek a közös tulajdonságai ezeknek a sokszögek?
3) Melyek azok a sajátos tulajdonságok, amelyek megkülönböztetik ezeket a sokszögeket egymástól?

Fedezzük fel, értsük meg!

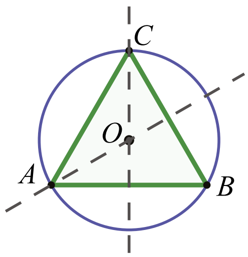
1. értelmezés
Szabályos sokszögeknek nevezzük az olyan konvex sokszögeket, amelyeknek az oldalaik is, a szögeik is kongruensek.

Példák
Szabályos háromoldalú sokszög: *egyenlő oldalú háromszög*.
Szabályos négyoldalú sokszög: *négyzet*.
Szabályos ötoldalú sokszög: *szabályos ötszög*
Szabályos hatoldalú sokszög: *szabályos hatszög*.

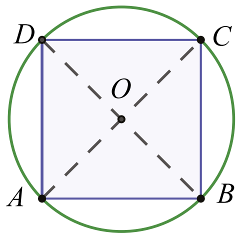
2. értelmezés. Ha egy kör tartalmazza egy sokszög minden csúcsát, **a sokszög köré írt körnek** nevezzük.

3. értelmezés. Ha egy sokszög minden csúcsa ugyanazon a körön található, **körbeírt** sokszögnek nevezzük.

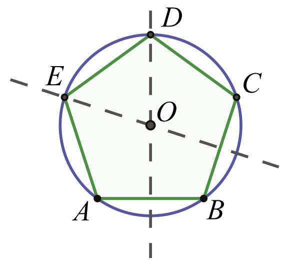
Vegyük észre (egyelőre bizonyítás nélkül), hogy minden szabályos sokszög körbe írható sokszög.
Példák: egyenlő oldalú háromszög, négyzet, szabályos ötszög, szabályos hatszög.



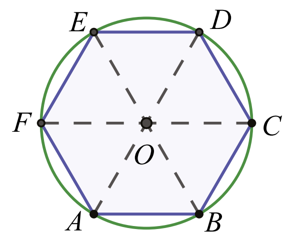
Az *ABC* háromszög körbe írható.



Az *ABCD* négyzet körbe írható.



Az *ABCDE* ötszög körbe írható.



Az *ABCDEF* hatszög körbe írható.

Figyeljük meg a fenti ábrákat! Érvényesek az alábbi tulajdonságok:
1) Egy szabályos sokszög köré írt kör középpontja egybeesik az oldalak felezőmerőlegeseinek metszéspontjával.
2) Egy szabályos sokszög köré írt kör középpontja egybeesik a csúcsokból kiinduló szögfelezők metszéspontjával.
3) Egy szabályos sokszög minden oldala a körülírt kör egy-egy húrja.
4) Egy n-oldalú szabályos sokszög csúcsai n kongruens körívet határoznak meg.
5) Egy n-oldalú szabályos sokszög minden szöge kerületi szög és a szárai által közrezárt körív $n-2$ kongruens körívből áll.
5) A kör középpontját a csúcsokkal összekötő *OA*, *OB*, ... sugarak, a csúcsoknak megfelelő szögek szögfelezői.

Feladat a portfólióba

a) Figyeljétek meg a fenti szabályos sokszögeket, majd másoljátok le és egészítsétek ki az alábbi táblázatot!

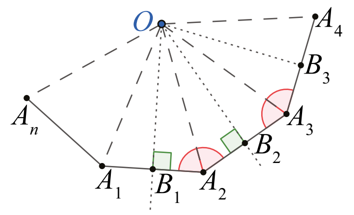
Sokszög	*ABC* háromszög	*ABCD* négyzet	*ABCDE* szabályos ötszög	*ABCDEF* szabályos hatszög
oldalak	*AB*, *BC*, *AC*		*AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*	
átlók	nincsenek			*AC*, *AD*, *AE*, *BD*, *BE*, *BF*, *CE*, *CF*, *DF*
szögek		*ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB*		

b) Bizonyítsátok be, hogy $n = 4$, $n = 5$ és $n = 6$ esetében, a szabályos sokszög egy csúcsából kiinduló oldalai és átlói $n-2$ kongruens szöget határoznak meg!

Alkalmazás

1. tétel. Bármely n oldalú szabályos sokszög esetén létezik egy kör, amely átmegy a sokszög minden csúcsán.

Bizonyítás:



Jelöljük a sokszöget $A_1A_2A_3A_4 \dots A_n$-nel, az A_1A_2, A_2A_3 és A_3A_4 oldalak felezőpontjait B_1, B_2 illetve B_3-mal.
Az A_1, A_2 és A_3 pontok nem kollineárisak, tehát egy háromszög csúcsait alkotják. Az $A_1A_2A_3$ háromszög köré írható kör O középpontja, a háromszög oldalfelező merőlegeseinek a metszéspontja. Tehát OB_1 az A_1A_2 szakasz felező merőlegese, OB_2 pedig az A_2A_3. szakasz felező merőlegese.

Az A_3A_4 oldal felező merőlegese is átmegy az O ponton. Az OB_1A_2 és OB_2A_2 háromszögek derékszögűek, OA_2 közös oldal, és $B_1A_2 \equiv A_2B_2$ (mint kongruens szakaszok felei).

Az átfogó-befogó egybevágósági eset alapján $OB_1A_2\Delta \equiv OB_2A_2\Delta$, tehát $OA_2B_1\sphericalangle = OA_2B_2\sphericalangle = \frac{1}{2}A_1A_2A_3\sphericalangle$.
Az OA_2A_3 egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek kongruensek:

$OA_3B_2\sphericalangle = OA_2B_2\sphericalangle = \frac{1}{2}\,A_1A_2A_3\sphericalangle = \frac{1}{2}A_2A_3A_4\sphericalangle$, tehát az A_3O félegyenes az $A_2A_3A_4\sphericalangle$ szögfelezője.

Az OA_3B_2 és OA_3B_3 háromszögek OA_3 oldala közös, $A_3B_2 \equiv A_3B_3$ (kongruens oldalak felei), és $OA_3B_2\sphericalangle = OA_3B_3\sphericalangle$, mivel A_3O szögfelező. Az O.Sz.O. egybevágósági eset alapján $OA_3B_2\Delta \equiv OA_3B_3\Delta$.
Következésképpen $OB_3A_3\sphericalangle = OB_2A_3\sphericalangle = 90^\circ$ és $A_3B_2 = A_3B_3$ mindkettő a sokszög egy-egy oldalának fele.
Bebizonyítottuk, hogy OB_3 az A_3A_4 oldal felező merőlegese, tehát az O középpontú kör, amely átmegy az A_1, A_2 és A_3 pontokon tartalmazza az A_4 pontot is.
Ezt a gondolatmenet folytatva, szerre bebizonyítható, hogy a szabályos sokszög minden csúcsa ugyanazon az O középpontú, $R = OA_1$ sugarú körön helyezkedik el.
Megjegyzés. A fenti tétel bizonyítása fáradságos ugyan, de kiváló példája egy logikai gondolatmenetnek.

Jegyezd meg!

- **Szabályos sokszögnek** nevezzük minden olyan konvex sokszöget, amelynek az oldalai is, a szögei is kongruensek.
- Egy csúcsból kiinduló félegyenes, amely átmegy a körülírt kör O középpontján, azonos az adott csúcshoz tartozó szög szögfelezőjével.
- A szabályos sokszög bármely szögének szögfelezője átmegy a körülírt kör középpontján.
- Egy n-oldalú szabályos sokszög szögeinek összege $(n-2)\cdot 180^\circ$.
- Egy szabályos sokszög oldalfelező merőlegesei a sokszög köré írt kör középpontjában futnak össze.
- Egy n-oldalú szabályos sokszög minden szögének mértéke $\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$.

Gyakorlatok, feladatok

1. Rajzoljatok egy O középpontú, r sugarú kört és rögzítsetek egy A pontot a körön. Vegyétek körzőnyílásba a kör sugarát és jelöljétek meg a körön az A, B, C, D, E, F pontokat, ebben a sorrendben úgy, hogy $AB = BC = CD = DE = EF = r$ teljesüljön! Igazoljátok, hogy:

a) $AF = r$;

b) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$;

c) az ACE háromszög és az $ABCDEF$ hatszög szabályos!

2. Rajzoljatok egy O középpontú kört és a középponton keresztül az a és b egymásra merőleges egyenest! A kört az a egyenes A-ban és C-ben, a b egyenes B-ben és D-ben metszi. Igazoljátok, hogy $ABCD$ szabályos sokszög!.

3. Egy egyenlő oldalú háromszög magassága 9 cm. Számítsátok ki a háromszög köré írt kör sugarát!

4. Egy 144 cm^2 területű négyzet csúcsai egy körön fekszenek. Számítsátok ki a kör átmérőjét!

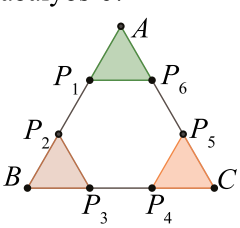
5. Egy szabályos hatszög kerülete 108 cm, csúcsai egy körön fekszenek. Számítsátok ki a kör sugarát.

6. Rajzoljatok egy $ABCD$ téglalapot, amelyben $AB = 4$ cm és $ABD\sphericalangle = 60^\circ$.

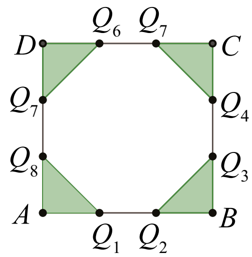
a) Bizonyítsátok be, hogy létezik egy kör, amely áthalad a téglalap összes csúcsán! Határozzátok meg a sugarát, majd rajzoljátok is meg a kört!

b) Az AD oldal felezőmerőlegese E-ben és F-ben metszi az a) alpontban megrajzolt kört. Igazoljátok, hogy $ABFCDE$ szabályos hatszög!

7. Az ABC egyenlő oldalú háromszög minden oldalát felosztjuk három kongruens részre, az ábrának megfelelően. Döntsétek el, hogy a kiszínezett sarkok eltávolítása után megmaradt sokszög szabályos-e?



8. A $DEFG$ négyzet minden oldalát felosztjuk három kongruens részre, az ábrának megfelelően. Döntsétek el, hogy a kiszínezett sarkok eltávolítása után megmaradt sokszög szabályos-e? Indokoljátok is a választ!



9. Tekintsük az ABC, ACD, ADE, AEF, AFG egyenlő oldalú háromszögeket, melyek belső tartományai páronként diszjunktak (nincs közös belső pontjuk).

a) Döntsétek el, hogy a $BCDEFG$ hatszög szabályos-e? Indokoljátok meg a választ!

b) Milyen típusú négyszög az $ABCD$ és az $EFGB$?

10. Az $MNPQRS$ szabályos hatszögben $MP = 8\sqrt{3}$ cm. Számítsátok ki a hatszög körülírt körének sugarát!

11. Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = a$ cm, $BC = b$ cm. A téglalap oldalaira, a téglalapon kívül négyzeteket szerkesztünk.

a) Bizonyítsátok be, hogy a négyzetek középpontjai egy szabályos sokszög csúcsaiban vannak!

b) Számítsátok ki ezen sokszög körülírt körének sugarát!

12. A $\mathcal{C}(O, r)$ körbe szabályos n-oldalú sokszöget írunk, $n \geq 3$. A sokszög egyik oldala A_1A_2 Számítsátok ki az $\overset{\frown}{A_1A_2}$ körív mértékét, ha $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.

13. Az $MNPQRS$ szabályos hatszögben A, B, C és D az MN, PQ, QR illetve SM oldalak felezőpontjai.

a) Számítsátok ki az AC és BD egyenesek által bezárt szöget!

b) Milyen típusú négyszög az $ABCD$?

14. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög a $\mathcal{C}(O, r)$ körbe írható. Az A és C pontban érintőket húzunk a körhöz, ezek T-ben metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy:

a) TAC egy szabályos sokszög;

b) $OB = BT$.

5.3. A kör kerülete és a körlap területe

Egy O középpontú, R sugarú körön felvesszük az A és B pontot. Meg szeretnénk határozni a kör kerületét, ami nem más, mint az $\overset{\frown}{ABA}$ körív hossza. Az eddig tanult ismeretek alapján ez a feladat nem oldható meg, de egy kísérlettel közelebb juthatunk a megoldáshoz.

Fedezzük fel, értsük meg!

Egy pénzérme peremén megjelölünk egy pontot.
Elgördítjük az érmét egy egyenes mentén, majd megmérjük annak a szakasznak a hosszát, amely a megjelölt pont és az egyenes első találkozási pontjától a második találkozási pontjáig tart.
Kiszámítjuk a mért szakasz és a pénzérme átmérőjének arányát: az eredmény 3,1 és 3,2 közé esik.
Többször megismételjük ezt a kísérletet, különböző méretű körökkel, és azt találjuk, hogy a végeredmény (a kiszámított arány értéke) mindig ugyanaz, függetlenül a pénzérme átmérőjétől.
Ezt az állandó arányt a görög π betűvel jelöljük, ami a görög „perimetros” (kerület) szó első betűje, és pinek ejtjük. Irracionális szám (végtelen, nem szakaszos tizedes tört), közelítő értéke $\pi = 3{,}1415926535\ldots$.
Rendszerint két tizedesnyi pontossággal használjuk: $\pi \approx 3{,}14$.
Következésképpen, az R sugarú kör kerületét a $K_{kör} = 2 \cdot \pi \cdot R$ képlettel számíthatjuk ki.
Ez a képlet a teljes kör, tehát a 360°-os körív hosszára vonatkozik.

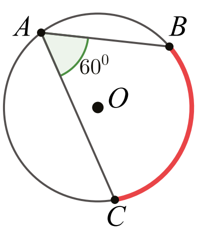
A $\mathcal{C}(O, R)$ kör tetszőleges $\overset{\frown}{AB}$ körívének hossza egyenesen arányos a körív fokban mért mértékével, tehát $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{L_{\overset{\frown}{AB}}} = \dfrac{360^\circ}{2 \cdot \pi \cdot R}$.

Ha A és B két adott pont a körön, az általuk meghatározott két körív hossza:

– a $\mathcal{C}(O, R)$ körön az $\overset{\frown}{AB}$ kis körív hossza: $L_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot \overset{\frown}{AB}}{180^\circ} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot AOB\sphericalangle}{180^\circ}$;

– a $\mathcal{C}(O, R)$ körön az $\overset{\frown}{AB}$ nagy körív hossza:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = 2 \cdot \pi \cdot R - \frac{\pi \cdot R \cdot \overset{\frown}{AB}}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R \cdot (360^\circ - \overset{\frown}{AB})}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R \cdot (360^\circ - AOB\sphericalangle)}{180^\circ}.$$



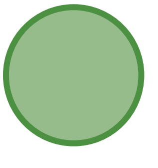
Példa. Számítsuk ki a $\mathcal{C}(O, R)$ körön egy 60°-os kerületi szög szárai által közrezárt körív hosszát!

A BAC kerületi szög mértéke: $BAC\sphericalangle = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$, tehát $\overset{\frown}{BC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

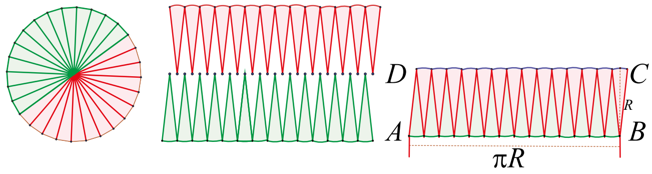
Mivel $\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{L_{\overset{\frown}{BC}}} = \dfrac{120^\circ}{L_{\overset{\frown}{BC}}} = \dfrac{360^\circ}{2 \cdot \pi \cdot R}$ következik, hogy $L_{\overset{\frown}{BC}} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R}{3}$.

Megjegyzés. A körív mértéke és a körív hossza egyenesen arányos mennyiségek, ezért a körív hossza kiszámítható egyszerű hármasszabállyal is.

1. értelmezés. O középpontú, R sugarú **körlapnak** nevezzük a $\mathcal{C}(O, R)$ kör belső pontjainak és kör pontjainak az egyesített halmazát.



A körlap területe egy olyan képlettel számítható ki, amely nem bizonyítható az általános iskolában tanultak alapján. Közelítőleg becsüljük a körlap területét úgy, hogy kongruens középponti szögek segítségével $2n$ darab egyforma körcikkre bontjuk. Választunk egy ésszerű értéket, pl. $2n = 28$-at, és ugyanennyi egyenlő mértékű középponti szöget szerkesztünk. Az átmérő egyik oldalán található körcikkeket pirosra, a másikon zöldre festjük, majd kifejtjük őket egy egyenes mentén úgy, hogy a körcikkek „alapjai” ellentétes oldalon legyenek (lásd a lenti ábrát). Ezután a körcikkeket egybekapcsoljuk (összecsúsztatjuk), az eredmény egy „majdnem” paralelogramma (ha n nagyon nagy, ez téglalaphoz közelít). A paralelogramma egyik oldalának hossza egyenlő a félkör hosszával, magassága pedig megközelítőleg a kör R sugarával. Tehát a paralelogramma területe megközelítőleg egyenlő $\pi \cdot R^2$-tel.



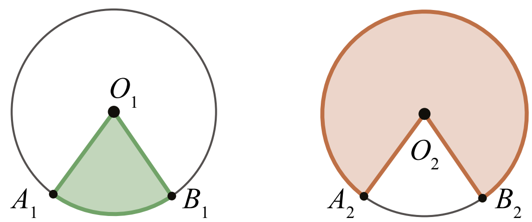
A körlap területének képlete:
$\mathcal{T} = \pi \cdot R^2$.

Megjegyzés: a *körlap területe* kifejezés helyett rendszerint a *kör területe* kifejezést használjuk

2. értelmezés: A $\mathcal{C}(O,R)$ kör $\overset{\frown}{AB}$ köríve és az OA és OB sugara által határolt síkidomot, a határaival együtt, **körcikknek** nevezzük.

Ábrázoltuk az első körben az O_1A_1 és O_1B_1 sugár, valamint az $\overset{\frown}{A_1B_1}$ kis körív által határolt körcikket, a második körben pedig az O_2A_2 és O_2B_2 valamint az $\overset{\frown}{A_2B_2}$ nagy körív által határolt körcikket.

A körcikk területe egyenesen arányos a hozzá tartozó körív mértékével.



Az $\overset{\frown}{A_1B_1}$ kis körívhez tartozó körcikk területe: $\dfrac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\mathcal{T}_{A_1O_1B_1}} = \dfrac{360^\circ}{\pi \cdot R^2}$, következik, hogy $\mathcal{T}_{A_1O_1B_1} = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \overset{\frown}{A_1B_1}}{360^\circ}$.

Az $\overset{\frown}{A_2B_2}$ nagy körívhez tartozó körcikk területét úgy kapjuk meg, hogy a teljes kör területéből kivonjuk az $\overset{\frown}{A_2B_2}$ kis körívhez tartozó körcikk területét $\mathcal{T}_{A_2O_2B_2} = \pi \cdot R^2 - \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \overset{\frown}{A_2B_2}}{360^\circ}$.

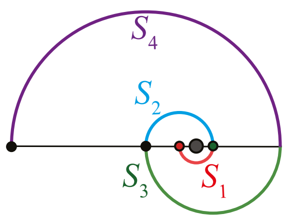
Az $\overset{\frown}{A_2B_2}$ nagy körívhez tartozó körcikk területe: $\mathcal{T}_{A_2O_2B_2} = \pi \cdot R^2 - \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \overset{\frown}{A_2B_2}}{360^\circ}$, a képletben az $\overset{\frown}{A_2B_2}$ kis körív szerepel.

Megjegyzés. A körív mértéke és a körcikk területe egyenesen arányos mennyiségek, ezért a körcikk területe kiszámítható egyszerű hármasszabállyal is.

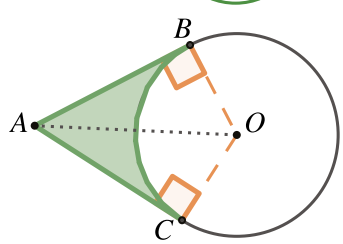
1. alkalmazás. Négy félkörből álló csigavonalat rajzoltunk, a félkörök sugara rendre 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 egység. Számítsuk ki a csigavonal hosszát!

Bizonyítás. A piros félkör sugara 1 egység, a kék félköré 2, a zöldé 4, végül a lila félkör sugara 8 egység.

A teljes csigavonal hossza: $L = \pi + 2 \cdot \pi + 4 \cdot \pi + 8 \cdot \pi = 15 \cdot \pi$.



2. alkalmazás. Adott a $\mathcal{C}(O, R)$ kör és A egy külső pont. Az A-ból húzott érintők a kört a B illetve C pontban metszik és egymással 60°-os szöget zárnak be. Számítsuk ki az érintők és a $\overset{\frown}{BC}$ kis körív által határolt síkidom területét!



Megoldás. A keresett területet úgy számítjuk ki, hogy kivonjuk az $ABOC$ négyszög területéből a $\overset{\frown}{BC}$ kis körív által meghatározott körcikk területét. Mivel $AB \equiv AC$ és $BO \equiv CO$, az AOB és AOC derékszögű háromszögek kongruensek. Következik, hogy AO a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője és $\mathcal{T}_{ABOC} = 2 \cdot \mathcal{T}_{ABO}$.

Az AOB háromszögben az OB befogóval szemben fekvő szög 30°-os, ezért $AO = 2 \cdot OB = 2 \cdot R$ és $AB = R\sqrt{3}$.

$\mathcal{T}_{ABOC} = 2 \cdot \mathcal{T}_{ABO} = 2 \cdot \dfrac{AB \cdot BO}{2} = R^2\sqrt{3}$.

Az $ABOC$ négyszögben kiszámítjuk a BOC szög mértékét: $BOC\sphericalangle = 360° - ABO\sphericalangle - ACO\sphericalangle - BAC\sphericalangle = 120°$.
Mivel a $BOC\sphericalangle$ középponti szög, a $\overset{\frown}{BC}$ kis körív mértéke is 120°. A $\overset{\frown}{BC}$-hez tartozó körcikk területe:
$\mathcal{T}_{körcikk} = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot 120°}{360°} = \dfrac{\pi \cdot R^2}{3}$, a keresett síkidom területe $\mathcal{T} = R^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi \cdot R^2}{3} = R^2\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Jegyezd meg!

- Az R sugarú kör kerületét az: $\mathcal{K}_{kör} = 2 \cdot \pi \cdot R$ képlettel számítjuk ki.
- A $\mathcal{C}(O,R)$ körön egy körív hossza egyenesen arányos a körív mértékével.
- Az R sugarú körlap területét a $\mathcal{T}_{kör} = \pi \cdot R^2$ képlettel számítjuk ki.
- A $\mathcal{C}(O,R)$ körben egy körcikk területe egyenesen arányos a hozzá tartozó körív mértékével.

Gyakorlatok, feladatok

1. Készítsetek elő egy körzőt, egy beosztásos vonalzót, egy 35 cm-nél hosszabb madzagot vagy zsinórt (ne legyen nyújtható!) és egy ollót. Rajzoljatok egy $r = 5$ cm sugarú kört. Jelöljetek meg A-val egy pontot a körön. A zsinór egyik végét rögzítsétek az A pontra, majd fektessétek végig a minél pontosabban a körön, amíg visszaér az A pontba. Vágjátok le a fel nem használt végét. Mérjétek meg az így kapott zsinórt, és hasonlítsátok össze a kapott eredményt 10π-vel! Használjátok a $\pi \approx 3{,}14$ közelítő értéket.

2. Számítsátok ki a tanult képlet alapján a kör kerületét, ha a sugara:
a) 5 cm; b) 7,5 cm; c) $\dfrac{10}{\pi}$ cm.

3. Határozzátok meg egy kör átmérőjét, ha a kerülete:
a) 14π cm; b) 5 dm.

4. Számítsátok ki egy kör területét, ha a sugara:
a) 6 cm; b) $\dfrac{9}{2}$ cm; c) π cm.

5. Egy kör területe $4{,}84\,\pi$ cm². Határozzátok meg a kör átmérőjét!

6. Egy kör kerülete $36\,\pi$ cm. Számítsátok ki az általa határolt körlap területét!

7. A T és k valós számok egy kör területét illetve kerületét fejezik ki, cm²-ben illetve cm-ben mérve. Határozzátok meg a T és k számokat, ha $\dfrac{T}{k} = \dfrac{5}{2}$!

8. A $\mathcal{C}_1(O, r_1)$ és $\mathcal{C}_2(O, r_2)$ kör sugara $r_1 = 17$ cm illetve $r_2 = 21$ cm.
a) Mennyivel nagyobb a $\mathcal{C}_2$ kör kerülete a $\mathcal{C}_1$ kör kerületénél?
b) Számítsátok ki a két körvonal által határolt síkidom (körgyűrű) területét!

9. Az A, B és C pont a $\mathcal{C}(O,r)$ körön úgy helyezkedik el, hogy $\overset{\frown}{AB} = 120°$ és C az $\overset{\frown}{AB}$ nagy körív felezőpontja. Ha $AD \perp BC$, $D \in BC$ és $AD = 18$ cm, számítsátok ki a kör kerületét!

10. Az $EFGH$ négyzet csúcsai a $\mathcal{C}(O,r)$ körön fekszenek, és a kör középpontjának távolsága az egyik oldaltól $4\sqrt{2}$ cm. Számítsátok ki a négyzet köré írt kör sugarát, kerületét és területét!

11. Az $ABCD$ téglalap csúcsai az O középpontú körön vannak, és $AC = 2 \cdot BC$.
a) Igazoljátok, hogy a téglalap átlói az O pontban metszik egymást!
b) Tudva azt, hogy az AOD háromszög területe $4\sqrt{3}$ cm², számítsátok ki a kör kerületét és területét!

12. Az A, B és C pont a $\mathcal{C}(O,r)$ körön található úgy, hogy $\overset{\frown}{AC}$ egy félkör és $\overset{\frown}{AB} = 120°$.
Ha $BC = 16$ cm, számítsátok ki az O középpontú, r sugarú kör területét!

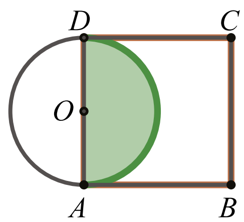
13. Az AB és BC szakaszok egymásra merőleges húrok a $\mathcal{C}(O,r)$ körben, és $AB = BC = \sqrt{2}$ m. Számítsátok ki a kör kerületét!

14. Az A, B, C és D kollineáris pontok ebben a sorrendben helyezkednek el, és centiméterben kifejezve $AB = BC - 1 = CD - 2 = 3$. Ha k_1, k_2 és k_3 az AB, BC illetve CD átmérőjű kör kerülete, számítsátok ki az $a = \frac{k_1}{k_2 + k_3} + \frac{k_2}{k_3 + k_1} + \frac{k_3}{k_1 + k_2}$ kifejezés értékét!

15. Az ábrán az $ABCD$ négyzet és a $\mathcal{C}(O,r)$ kör látható. A kiszínezett felület területe 8π cm^2.

a) Számítsátok ki a kör kerületét és a négyzet területét!

b) Határozzátok meg annak a síkidomnak a területét, amelyet úgy kapunk, hogy a négyzet belső tartományából eltávolítjuk a kiszínezett felületet!



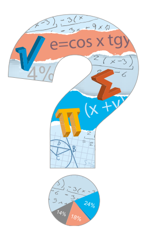
16. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 60°$, $AB = x$, $AC = 2x$.

a) Fejezzétek ki x függvényében az ABC háromszög köré írt kör sugarát!

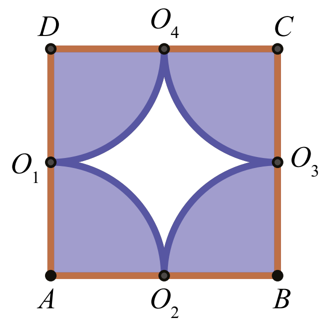
b) Az előző alpontban kapott eredmény alapján, számítsátok ki az ABC háromszög köré írt kör kerületét és területét!

17. Egy körlapból kivágható legnagyobb négyzet területe 32 cm^2. Határozzátok meg a körlap területét!

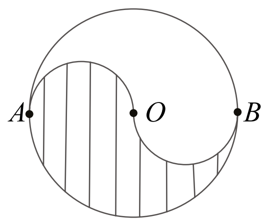
18. Egy kör alakú karkötő sugara 4 cm. Az ékszerész kivág belőle egy 90°-os $\overset{\frown}{AB}$ körívet, majd az A és B pontot újra összeilleszti úgy, hogy szintén kör alakú, de kisebb karkötő keletkezzen. Számítsátok ki az új kör kerületét és az általa meghatározott körlap területét!



19. Az ábrán egy virágágyás alaprajza látható. A kiszínezett felületre virágokat ültetnek, a maradék helyre gyepet telepítenek. Tudjuk, hogy $ABCD$ négyzet és az $\overset{\frown}{O_1O_2}$, $\overset{\frown}{O_2O_3}$, $\overset{\frown}{O_3O_4}$, $\overset{\frown}{O_4O_1}$ körívek az A, B, C illetve D középpontú, egyenlő sugarú körökhöz tartoznak. Döntsétek el, melyik terület nagyobb: az, amelyre virágot ültetnek, vagy az, amelyre gyepet telepítenek?

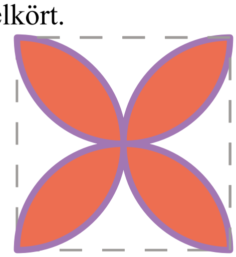


20. Az O középpontú, $R = 6$ cm sugarú kör AB átmérőjének ellentétes oldalaira, megszerkesztjük az OA és OB átmérőjű félköröket.



Határozzátok meg a bevonalkázott alakzat területét és a határát alkotó körívek összhosszát!

21. Az ábrán látható virágminta úgy készült, hogy egy 8 cm oldalhosszúságú négyzet minden oldalára szerkesztettünk a kör belsejében egy-egy félkört.



Határozzátok meg a virágmintát képező körívek hosszának összegét és a virágminta területét!

Ismeretfelmérő

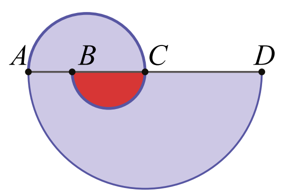
Hivatalból: 10 pont

I. *Írd ki az egyes feladatokhoz tartozó egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** Egy kör kerülete π cm. A kör átmérője: A. 2 cm B. 0,5 cm C. 1 cm D. 1,5 cm
5p	**2.** Ha egy kör sugara $\sqrt{2}$ dm, akkor a területe: A. 2π dm^2 B. $\sqrt{2}\,\pi$ dm^2 C. π dm^2 D. $2\sqrt{2}\,\pi$ dm^2
5p	**3.** Az ABC egyenlő oldalú háromszög csúcsai egy 15 cm sugarú körön helyezkednek el. Az $\overset{\frown}{AB}$ körív hossza: A. 5π cm B. 10π cm C. 15π cm D. 20π cm
5p	**4.** Egy körcikk területe nyolcadrésze azon kör területének, amelyből származik. A körcikkhez tartozó középponti szög mértéke: A. 90° B. 60° C. 35° D. 45°
5p	**5.** Az $ABCD$ négyzet egy 20 cm sugarú körbe van beírva, és P az $\overset{\frown}{AB}$ kis körív felezőpontja. A $\overset{\frown}{PC}$ körív hossza: A. 10π cm B. 15π cm C. 20π cm D. 40π cm
	6. Az $A_1A_2 \ldots A_n$ szabályos sokszög, $n \geq 3$, csúcsai egy körön vannak.
5p	a) Ha $n = 3$, akkor az $\overset{\frown}{A_1A_2A_3}$ körív mértéke: A. 60° B. 90° C. 120° D. 240°
5p	b) Ha $n = 4$, akkor az $\overset{\frown}{A_2A_3A_4}$ körív mértéke: A. 90° B. 120° C. 180° D. 240°
5p	c) Ha $n = 6$, akkor az $\overset{\frown}{A_3A_4A_5}$ körív mértéke: A. 240° B. 120° C. 180° D. 90°

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

	1. Az A, B, C, D pontok kollineárisak, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 8$ cm, a $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ és $\overset{\frown}{AD}$ körívek pedig félkörök.
5p	a) Szerkeszd meg mértani felszerelés segítségével a feladat adatainak megfelelő ábrát!
5p	b) Számítsd ki a pirosra színezett síkidom területét!
5p	c) Számítsd ki a kékre színezett alakzat területét!
10p	d) Számítsd ki a $BCAD$ csigavonal hosszát!
10p	**2.** Az $ABCD$ négyzet oldalaira, a négyzeten kívül MAB, NBC, PCD és QDA egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk. Igazold, hogy $MNPQ$ szabályos sokszög!
	3. Az MNP egyenlő oldalú háromszög oldalaira, a háromszögön kívül $MNBA$, $NPDC$ és $PMFE$ négyzetet szerkesztünk.
5p	a) Számítsd ki az $ABCDEF$ sokszög szögeit!
10p	b) Állapítsd meg, hogy az $ABCDEF$ sokszög szabályos-e? Indokod a választ!



6 Háromszögek hasonlósága

6.1. Arányos szakaszok. Az egyenlő közű párhuzamosok tétele
6.2. Thalész tétele. Thalész tételének fordított tétele. Szakasz felosztása arányos részekre
6.3. Hasonló háromszögek. A hasonlóság alaptétele. A háromszögek hasonlósági esetei

Sajátos kompetenciák:

1.6. 2.6. 3.6. 4.6. 5.6. 6.6.

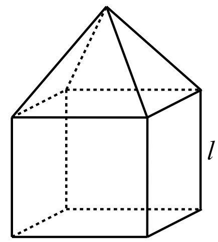
6.1. Arányos szakaszok. Az egyenlő közű párhuzamosok tétele

1. ℓ. Arányos szakaszok

Emlékeztető

1) Azt mondjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok egyenesen arányosak (vagy egyszerűen arányosak) a $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, valós számokkal ha $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$. Az arányok közös értékét, a k számot, hasonlósági állandónak (tényezőnek), vagy hasonlósági aránynak nevezzük.
2) Egy háromszög oldalfelezői egy pontban metszik egymást. A metszéspontot a háromszög súlypontjának nevezzük és mindegyik oldalfelezőn kétharmad részre van a csúcstól és egyharmad részre az alaptól.

Oldjuk meg figyelmesen!



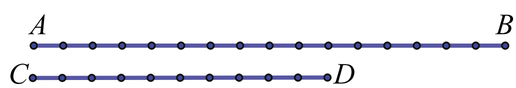
Feladat. András kalitkát szeretne építeni a madaraknak, egyenlő hosszúságú, fából készült léceket használva. A házikó tervrajza a mellékelt ábrán látható. Hogy tudja elkészíteni András a kalitkát, ha rendelkezésére áll egy 3m hosszúságú léc?

Megoldás. A tervrajz alapján megszámolja, hogy 16 lécre van szüksége. András tudja, hogy ha a lécek összhosszúságát (L) elosztja egy léc hosszúságával (l), 16-ot kap eredményül, vagyis $16 = \frac{L}{l}$. Mivel a rendelkezésre álló léc 3 m hosszúságú, tehát $L \leq 300$ cm, ezért szeretné tudni a legnagyobb l hosszúságot centiméterben, egész számmal kifejezve. András a következőképpen jár el: a rendelkezésre álló léc hossza 3 m = 300 cm. Mivel a szükséges 16 léc egyenlő hosszúságú kell legyen, ezért elosztja a 300-at 16-tal, és azt tapasztalja, hogy a lécek legnagyobb hosszúsága (egész számmal kifejezve) 18 cm lehet. András 18 cm hosszúságú léceket vág a 3 m hosszúságú lécből és megépíti a kalitkát.

Megjegyzés. András 288 cm-t fog felhasználni a rendelkezésére álló 300 cm-ből. A szükséges lécek számát a **két szakasz hosszúságának aránya** adja meg, **ugyanazzal a mértékegységgel** kifejezve: a felhasznált lécek összhosszúsága és az egyik léc hosszának aránya.

1. értelmezés. Két, ugyanazzal a mértékegységgel mért szakasz aránya egyenlő a szakaszok hosszának az arányával.

1. alkalmazás. Számítsd ki az AB és CD szakaszok arányát tudva, hogy a szakaszok hosszát ugyanazzal a mértékegységgel kifejezeve, az AB szakasz 16 egység, a CD szakasz 10 egység.



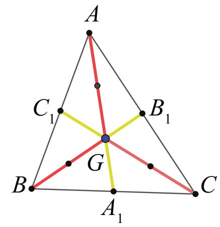
Az AB és CD szakaszok aránya $\frac{AB}{CD} = \frac{16}{10} = 1{,}6$.

2. alkalmazás. Határozd meg a mellékelt ábrán látható bankkártya méreteinek arányát egy tizedesnyi pontossággal tudva, hogy a kártyát körülhatároló téglalap hosszúsága 8,6 cm, valamint a szélessége 5,4 cm.

Megoldás: $\frac{AB}{CD} = \frac{8{,}6}{5{,}4} = 1{,}6\ldots$. Ez a szám megközelítőleg az $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180\ldots$, irracionális szám, a híres, aranymetszés vagy aranyarány, ami a természetben és a művészetben is gyakran megjelenik, természetes egyensúlyt teremtve a szimmetria és az aszimmetria között.

Fedezzük fel, értsük meg!

2. értelmezés: Azt mondjuk, hogy az A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, … , A_nB_n szakaszok arányosak a C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, … , C_nD_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, szakaszokkal ha a hosszúságuk (egyenesen) arányos, vagyis: $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \ldots = \frac{A_nB_n}{C_nD_n} = k$. Az arányok közös értékét, a k számot, hasonlósági állandónak nevezzük.



Példa: Igazoljátok, hogy az ABC háromszög csúcsai és a háromszög G súlypontja által meghatározott szakaszok arányosak a súlypont és a BC, AC és AB oldalak A_1, B_1 illetve C_1 felezőpontjai által meghatározott szakaszokkal. Határozzátok meg a hasonlósági arányt.
Megoldás: Az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok a háromszög oldalfelezői, valamint G a súlypontja. Ekkor $G \in AA_1$ és $AG = \frac{2}{3}AA_1$, $GA_1 = \frac{1}{3}AA_1$. Hasonlóan a másik két oldalfelező esetén is.

Azt kapjuk, hogy $\frac{AG}{GA_1} = \frac{\frac{2}{3}AA_1}{\frac{1}{3}AA_1} = 2$ és ezek analógiái, tehát $\frac{AG}{GA_1} = \frac{BG}{GB_1} = \frac{CG}{GC_1} = 2$. A hasonlósági arány: $k = 2$.

Alkalmazás

Megállapítottuk, hogy bármely két szakasz esetén meghatározható az arányuk (a szakaszok hosszának aránya, ugyanazzal a mértékegységgel kifejezve), amely egy pozitív valós szám. Feltevődik a kérdés: adott AB szakasz és k pozitív valós szám esetén létezik-e olyan C pont az A és B pontok által meghatározott egyenesen, amelyre az AC és BC szakaszok aránya k?

1. tétel. Bármely k pozitív valós szám esetén létezik egyetlen olyan C pont az AB szakasz belsejében, amelyre $\frac{AC}{BC} = k$.

Bizonyítás: Mivel $\frac{AC}{BC} = k$ így $\frac{AC}{AC + BC} = \frac{k}{k+1}$ ahonnan $AC = \frac{k}{k+1} \cdot AB$.

Mivel $\frac{k}{k+1} < 1$ ezért bármely k pozitív valós szám esetén kapjuk, hogy a C pont rajta van az AB szakaszon. Sőt, egyetlen olyan C pont létezik az AB szakaszon, amely $\frac{k}{k+1} \cdot AB$ távolságra van az A ponttól. Sajátos eset: $k = 1$ esetén a C pont az AB szakasz felezőpontja.

2. tétel. Bármely $k \neq 1$ pozitív valós szám esetén létezik egyetlen olyan C pont az AB szakasz tartóegyenesén, a szakasz külső tartományában, amelyre $\frac{AC}{BC} = k$.

Bizonyítás: A alábbi két eset lehetséges:

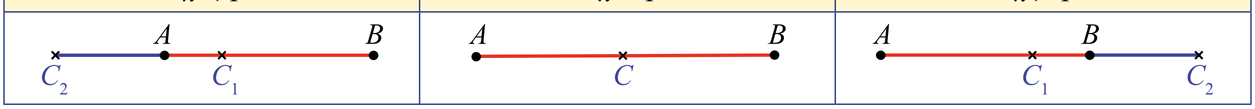
1) $k > 1$, estén $AC > BC$, és C pont az AB, szakasz külső tarományában van. Ez csak akkor lehetséges, ha a pontok az A–B–C sorrendben helyezkednek el.

Az $\frac{AC}{BC} = k$ aránypár egyenértékű az $\frac{AC - BC}{BC} = \frac{k-1}{1}$ aránypárral, ahonnan $BC = \frac{1}{k-1} \cdot AB$.
Tehát a C pont a BA félegyenessel ellentétes félegyenesen helyezkedik el $\frac{1}{k-1} \cdot AB$ távolságra a B ponttól.

2) $0 < k < 1$, esetén $AC < BC$, és a C pont az AB szakasz külső tarományában van. Ez csak akkor lehetséges, ha a pontok a C–A–B. sorrendben helyezkednek el.

Mindkét esetben a C pont egyértelműsége a szerkesztésből adódik.
Következtetés: Bármely $k \neq 1$ pozitív valós szám esetén létezik az A és B ponttal kollineáris C_1 és C_2 pont, egyik az AB szakasz belsejében, másik pedig a szakasz meghosszabbításán, ezek az AB szakaszt k arányban osztják.

$k < 1$	$k = 1$	$k > 1$



3. alkalmazás: Az A és B település közötti 24,5 km hosszúságú egyenes útszakaszon egy P munkapont található, és a PA és PB távolságok aránya 0,75. Határozzátok meg a munkapont távolságát a településektől külön-külön.

Megoldás: A feladat adatai alapján írhatjuk, hogy $PA + PB = 24{,}5$ és $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{4}$. Származtatással kapjuk, hogy

$\frac{PA}{PA+PB} = \frac{3}{3+4}$ vagyis $\frac{PA}{24{,}5} = \frac{3}{7}$, ahonnan $PA = 10{,}5$ és $PB = 14$.

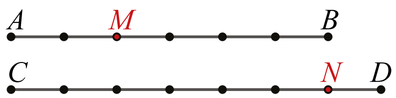
Tehát a munkapont tavolsága a településektől 10,5 km illetve 14 km.

Jegyezd meg!

- Két, ugyanazzal a mértékegységgel mért szakasz aránya egyenlő a szakaszok hosszának az arányával.
- Bármely $k \neq 1$ pozitív valós szám esetén létezik az A és B ponttal kollineáris C_1 és C_2 pont, egyik az AB szakasz belsejében, másik pedig a szakasz meghosszabításán, ezek az AB szakaszt k arányban osztják.
- Ha a C pont az AB szakasz felezőpontja, akkor ez a pont a szakaszt $k = 1$ arányban osztja.

Gyakorlatok, feladatok

1. Figyeljétek meg a mellékelt ábrát, majd határozzátok meg a következő arányok értékeit: $\frac{AM}{AB}, \frac{MB}{AM}, \frac{CN}{CD}, \frac{NC}{ND}$.

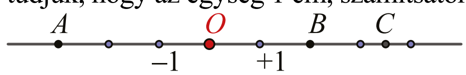


2. Határozzátok meg az AB és CD szakaszok arányát a következő esetekben:
a) $AB = 25$ mm, $CD = 15$ mm;
b) $AB = 0{,}17$ m, $CD = 510$ mm.

3. Az $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ pontok a PQ szakasz belsejében helyezkednek el ebben a sorrendben, 11 kongruens részre osztva a szakaszt. Határozzátok meg a következő arányok értékeit: $\frac{PA_1}{PQ}, \frac{PQ}{A_5A_6}, \frac{A_3A_7}{A_2A_9}$.

4. Rajzoljatok egy 6 cm hosszúságú CD szakaszt. Ha az E pont a CD egyenesen található, határozzátok meg az EC és ED szakaszok hosszát, majd az $\frac{EC}{CD}$ és $\frac{ED}{CD}$ arányok értékeit a következő esetekben:
a) Az E pont a CD szakaszon van és $EC = 2ED$;
b) Az E pont a CD szakaszon kívül van és $CE = 9$ cm.

5. A O origójú számegyenesen a mellékelt ábra szerint felvesszük az A, B és C pontokat. Ha tudjuk, hogy az egység 1 cm, számítsátok ki:



a) az AO, BO, BC szakaszok hosszát.
b) az $\frac{AO}{BO}, \frac{AO}{CO}, \frac{BO}{AC}, \frac{AB}{BC}$ arányokat.

6. Az ABC háromszögben jelölje D és E az AB illetve AC oldalak felezőpontját. Számítsátok ki az $\frac{AD}{DB}, \frac{EC}{AC}, \frac{K_{ADE}}{K_{ABC}}$ arányok értékeit.

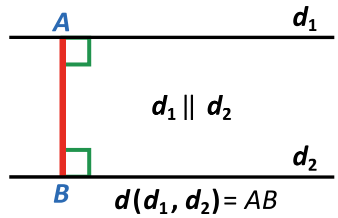
7. Az MN szakaszon tekintjük a C pontot úgy, hogy $\frac{CM}{CN} = \frac{2}{5}$. Ha tudjuk, hogy $MN = 14$ cm, számítsátok ki a CM és CN szakaszok hosszát.

8. Az $AB = 84$ mm hosszúságú szakaszon tekintjük a C pontot úgy, hogy $7 \cdot AC = 4 \cdot AB$. Határozzátok meg a BC szakasz hosszát, majd a $\frac{BC}{AC}$ arány értékét.

9. A d egyenesen tekintjük az A, B, C pontot úgy, hogy $AB = 15$ cm és $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$.
a) Számítsátok ki az AC és BC szakasz hosszát.
b) Állapítsátok meg a pontok sorrendjét a d egyenesen.

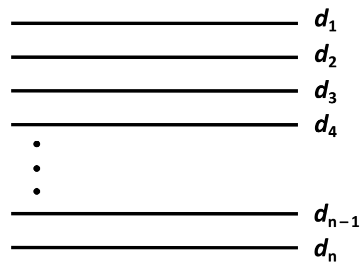
2.ℓ. Az egyenlő közű párhuzamosok tétele

1. értelmezés. A d_1 és d_2 párhuzamos egyenesek közötti távolságot az AB szakasz hossza adja meg, ahol $A \in d_1$ és $B \in d_2$, valamint $AB \perp d_1$.
A d_1 és d_2 párhuzamos egyenesek közötti távolságot jelölje $d(d_1, d_2)$.



Észrevétel: Két párhuzamos egyenes közötti távolságot az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől való távolsága adja meg. Használjuk a következő jelölést $d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = d(B, d_1) = AB$.

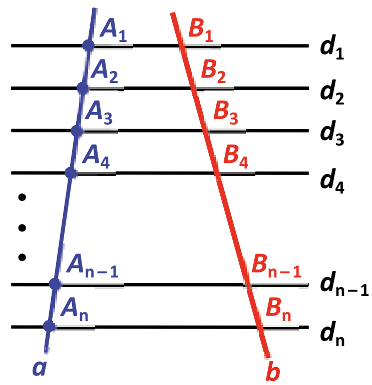
2. értelmezés. A $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \dots \parallel d_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, párhuzamos egyenesek sorozatát **egyenlő közű párhuzamosoknak** nevezzük, ha
$d(d_1, d_2) = d(d_2, d_3) = d(d_3, d_4) = \dots = d(d_{n-1}, d_n)$.



Példa: A létra fokai egymással párhuzamos egyeneseken helyezkednek el, amelyek egyenlő távolságra vannak egymástól.

Fedezzük fel, értsük meg!

Az egyenlő közű párhuzamosok tétele
Egyenlő közű párhuzamos egyenesek bármely szelőn kongruens szakaszokat határoznak meg.



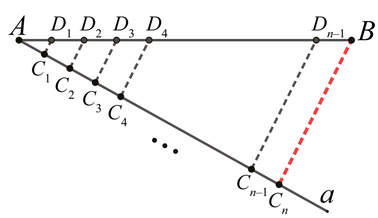
Másképp fogalmazva: ha $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \dots \parallel d_n$ párhuzamos egyenesek egy szelőn kongruens szakaszokat határoznak meg, akkor bármely más szelőn kongruens szakaszokat határoznak meg.

Alkalmazás

Az egyenlő közű párhuzamosok tételének egy gyakorlati alkalmazása a ***szakasz felosztása n egyenlő részre*** ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Alkalmazás: Határozzátok meg csak körző és vonalzó segítségével a $D_1, D_2, \dots, D_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pontokat az AB szakszon úgy, hogy $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \dots = D_{n-2}D_{n-1} = D_{n-1}B$.
Megoldás: Következőképpen járunk el:

1) Egy A kezdőpontú félegyenesen körző segítségével megszerkesztjük az n kongruens szakaszt, tehát $AC_1 \equiv C_1C_2 \equiv C_2C_3 \equiv \dots \equiv C_{n-1}C_n$.
2) A $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$, pontokon keresztül párhuzamosokat húzunk a C_nB egyenessel, amelyek az AB félegyenest a $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$, pontokban metszik. Ezek a pontok az AB szakaszt n egyenlő részre osztják, vagyis $AD_1 \equiv D_1D_2 \equiv D_2D_3 \equiv \dots \equiv D_{n-2}D_{n-1} \equiv D_{n-1}B = \frac{AB}{n}$, mivel a párhuzamosok az a szelőn kongruens szakaszokat határoznak meg.

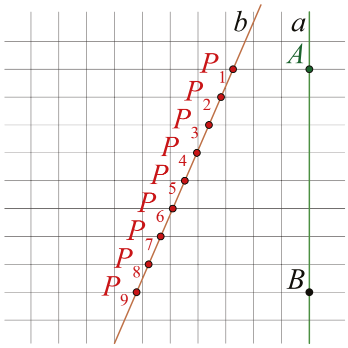


Jegyezd meg!

Egyenlő közű párhuzamos egyenesek bármely szelőn kongruens szakaszokat határoznak meg.

Gyakorlatok, feladatok

1. Egy négyzethálós lapon egy b egyenest rajzolunk. A mellékelt ábra alapján a vízszintes vonalak a b egyenest a P_1, P_2, … , P_9 pontokban metszik.

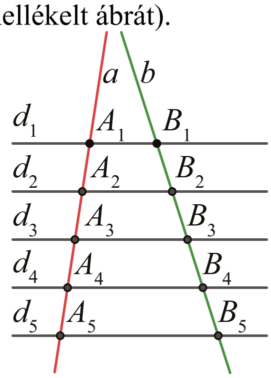


a) Igazoljátok, hogy $P_1P_2 \equiv P_2P_3 \equiv \ldots \equiv P_8P_9$.

b) Állapítsátok meg, hogy a P_5 pont felezőpont-ja-e a P_1P_9 szakasznak.

c) Tudva, hogy $P_2P_8 = 5{,}4$ cm, számítsátok ki a P_3P_7 szakasz hosszát, majd a $\dfrac{P_1P_3}{P_3P_5}$ arány értékét.

2. Az a és b egyenesek d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 egyenlő közű párhuzamos egyeneseket az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *illetve* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 pontokban metszik (lásd a mellékelt ábrát).



Tudjuk, hogy $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ és $B_1B_3 = 5{,}6$ cm.
Határozzátok meg a B_1B_2, B_1B_5, B_2B_5 szakaszok hosszát!

3. A CD hosszúságú szakaszon beosztásos vonalzót használva jelöljétek a P_1, P_2, P_3, P_4 pontokat úgy, hogy a CP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4D szakaszok kongruensek legyenek.

4. Egy O kezdőpontú félegyenesen tekintjük az A, B, C pontokat úgy, hogy $OA = 1$ cm, $OB = 2$ cm, $OC = 3$ cm. Az O, A, B, C pontokon kersztül húzott párhuzamos egyenesek egy tetszőleges d egyenest az M, N, P illetve Q pontokban metszenek.

a) Számítsátok ki az AB és BC szakaszok hosszát.

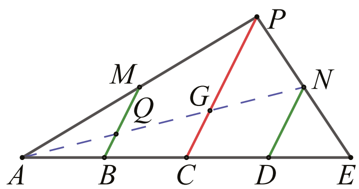
b) Igazoljátok, hogy a P pont az NQ szakasz felezőpontja.

c) Ha $NP = 2{,}8$ cm, számítsátok ki a $4 \cdot MQ$ hosszúságát.

5. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalán felvesszük az E és F pontot úgy, hogy $AE = EF = FB$. Az E és F ponton keresztül az AC egyeneshez húzott párhuzamosok a BC egyenest M és N pontban metszik. Igazoljátok, hogy $MN = \dfrac{1}{3} \cdot AD$.

6. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$ az MN ($M \in AD$ és $N \in BC$) középvonal a BD átlót a P pontban metszi, valamint $PQ \parallel BM$, $Q \in AD$. Igazoljátok, hogy $AM = 2 \cdot DQ$.

7. Az A, B, C, D, E kollineáris pontok ebben a sorrendben helyezkednek el úgy, hogy $AB = BC = CD = DE$, és P egy tetszőleges pont az AB egyenes egyik oldalán. A B ponton keresztül a PC egyeneshez húzott párhuzamos az AP egyenest M pontban metszi, valamint a D ponton keresztül a PC egyeneshez húzott párhuzamos a PE egyenest az N pontban metszi.



a) Igazoljátok, hogy AN oldalfelező az AEP háromszögben.

b) Ha $BM \cap AN = \{Q\}$ és $PC \cap AN = \{G\}$ igazoljátok, hogy $AQ = QG = GN$.

c) Mutassátok ki, hogy az AN, EM és PC egyenesek egy pontban futnak össze.

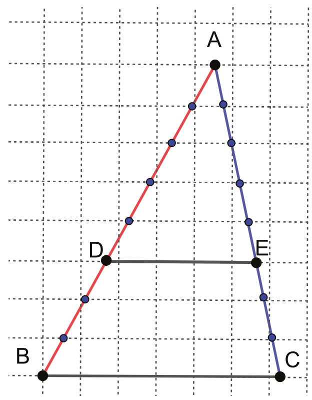
6.2. Thalész tétele. Thalész tételének fordított tétele. Szakasz felosztása adott arányban

1.ℓ. Thalész tétele

Emlékeztető

1) Két párhuzamos egyenes közötti távolságot az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől való távolsága adja meg.
2) Párhuzamos egyenesek sorozatát egyenlő közű párhuzamosoknak nevezzük, ha bármely két „szomszédos" egyenes közötti távolság ugyanakkora.

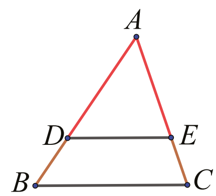
Példa: A négyzethálós lap vízszintes egyenesei tulajdonképpen egyenlő közű párhuzamosok.
Az ABC háromszög A csúcsa egy vízszíntes egyenesen legyen, valamint a B és C csúcsa egy másik vízszintes egyenesen helyezkedjen el.
Egy harmadik vízszintes egyenes az AB és AC oldalt a D illetve E pontban metszi.
A vízszintes egyenesek az AD és AE szakaszokon ugyanannyi, p darab, kongruens szakaszt határoznak meg. Ugyanúgy a DB és EC szakaszt is q darab egyenlő részre osztják a négyzetháló vízszintes egyenesei.
Tehát a vízszínetes egyenesek az AB szakaszt egyenlő hosszúságú részekre osztják, jelölje ezek hosszát u. Ekkor $AD = p \cdot u$, valamint $DB = q \cdot u$. Ugyanez érvényes az AC oldal esetén is, ahol jelölje egy rész hosszúságát v, így kapjuk, hogy $AE = p \cdot v$ és $EC = q \cdot v$.



Megfigyelhetjük, hogy $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{p \cdot u}{q \cdot u} = \dfrac{p}{q}$, valamint $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{p \cdot v}{q \cdot v} = \dfrac{p}{q}$, tehát $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$.
A mellékelt ábrán, $p = 5$ és $q = 3$.

Egy kis történelem
Milétoszi Thalész (623 – 546 Kr. e.), görög filozófus, a hét bölcs egyike, a matematika és filozófia atyja, a legkorábbi görög természetfilozófus.

Thalész tétele
Egy háromszög egyik oldalával húzott párhuzamos a másik két oldalon arányos szakaszokat határoz meg.



A mellékelt ábra jelöléseit használva Thalész tétele így írható

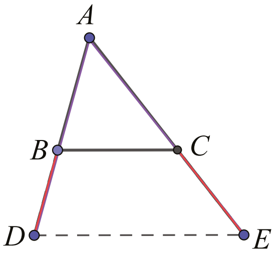
Ha $D \in AB$, $E \in AC$ és $DE \parallel BC$, akkor $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EC}$.

Fedezzük fel, értsük meg!

1. alkalmazás: Thalész tétele akkor is érvényes, ha a háromszögben az egyik oldallal húzott párhuzamos a másik két oldal tartóegyeneseit az oldalakon kívül metszi.
Bizonyítás.
Az ABC tetszőleges háromszögben a BC oldallal húzott d párhuzamos az AB és AC egyeneseket D illetve E pontban metszi úgy, hogy a D és E metszépontok nincsenek rajta AB illetve AC szakaszokon.

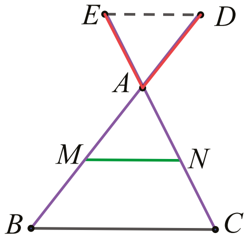
A következő esetek lehetségesek:

1) A B pont az AD szakaszon, míg a C pont az AE szakaszon van.



Az ADE háromszögben a BC egyenes párhuzamos a DE oldallal, így alkalmazva Thalész tételét kapjuk, hogy $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$, innen pedig származtatással az $\frac{AB+BD}{BD}=\frac{AC+CE}{CE}$ aránypárhoz jutunk, vagyis $\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$.

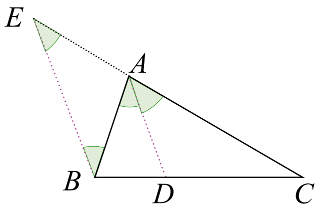
2) Az A pont rajta van a BD és EC szakaszon.



Jelölje M a D pontnak az A pontra vonatkozó szimmetrikusát, valamint N az E pont A szerinti szimmetrikusát. Ekkor $MA = AD$, $NA = AE$, ahonnan az O.SZ.O kongruencia eset alapján következik, hogy az AMN és ADE háromszögek kongruensek. Mivel az AMN és ADE belső váltószögek kongruensek, ezért $MN \parallel ED$ de $ED \parallel BC$, tehát $MN \parallel BC$. Így az ABC háromszögben MN párhuzamos a BC oldallal, tehát Thalész tétele alapján írhatjuk, hogy: $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$, ahonnan származtatással az $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ aránypárt kapjuk, vagy $\frac{DA}{AB}=\frac{EA}{AC}$, majd $\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$.

E három eredmény szerint Thalész tételét a következőképpen fogalmazhatjuk meg:
Egy háromszög egyik oldalával húzott párhuzamos a másik két oldalon vagy az oldalak meghosszabításain arányos szakaszokat határoz meg.

Alkalmazás



2. alkalmazás. A szögfelező tétele. Az ABC háromszög, AB és AC oldalai különböző hosszúságúak, AD a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője, valamint $D \in BC$.

Igazoljátok, hogy $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}$.

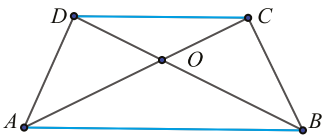
Megoldás: A háromszög B csúcsán keresztül párhuzamost húzunk az AD szögfelezővel, amely az E pontban metszi az AC egyenest. Az AD és EB egyenesek párhuzamosak, így az AC szelő által keletkezett megfelelőszögek kongruensek, vagyis $BEA\sphericalangle \equiv DAC\sphericalangle$. Majd az AB szelő által keletkezettt belső váltószögek is kongruensek, tehát $EBA\sphericalangle \equiv BAD\sphericalangle$.

Mivel AD szögefelező, ezért $DAB\sphericalangle \equiv DAC\sphericalangle$, tehát következik, hogy $BEA\sphericalangle \equiv EBA\sphericalangle$, vagyis az ABE háromszög egyenlő szárú, melynek alpja az EB, tehát $AE \equiv AB$. (1)

A CEB háromszögben AD párhuzamos az EB oldallal, tehát Thalész tétele értelmében kapjuk, hogy $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AE}$

Innen pedig, felhasználva az (1) kongruenciát következik, hogy $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}$.

Észrevétel: Ha $AB \equiv AC$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú, tehát az AD szögfelező egyben oldalfelező is, ezért $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}=1$.



3. alkalmazás: Jelölje O az $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontját. Igazoljuk, hogy a trapéz átlóin az O pont arányos szakaszokat határoz meg.

Megoldás: Ha az $ABCD$ trapéz alapjai AB és CD akkor $AC \cap BD = \{O\}$.

Az O pont által a trapéz átlóin meghatározott szakaszok az OA, OC és OB, OD, amelyekről igazolni kell, hogy arányosak. Az OAB háromszögben $C \in AO$, $D \in BO$ és $CD \parallel AB$, tehát Thalész tétele értelmében kapjuk, hogy $\frac{CO}{CA}=\frac{DO}{DB}$. Innen pedig származtatással $\frac{CO}{OA}=\frac{DO}{OB}$, majd $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$, ami éppen a kért arányosság.

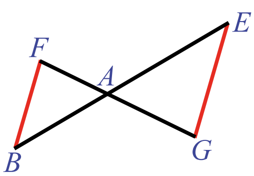
Gyakorlatok, feladatok

1. a) Rajzoljatok egy ABC háromszöget tudva, hogy $AB = 6$ cm és $AC = 8$ cm. Jelöljétek meg az AB szakaszon az M pontot úgy, hogy $AM = 2$ cm.
b) Húzzatok párhuzamost az M ponton keresztül a BC oldallal és jelölje N e párhuzamos metszéspontját az AC oldallal.
c) Beosztásos vonalzóval mérjétek meg az AN szakasz hosszát.
d) Thalész tételét használva számítsátok ki az AN szakasz hosszát, majd a kapott eredményt hasonlítsátok össze a mérési eredménnyel.

2. Az ABC háromszögben $D \in AB$, $E \in AC$ és $DE \parallel BC$. Másoljátok le és egészítsétek ki a pontozott részeket úgy, hogy egyenlő arányokat kapjatok:

a) $\dfrac{AD}{DB} = \ldots$; b) $\dfrac{EC}{AE} = \ldots$; c) $\dfrac{AE}{AC} = \ldots$.

3. A mellékelt ábrán az F, A, G illetve B, A, E pontok kollineárisak, valamint $FB \parallel EG$. Másoljátok le és egészítsétek ki a pontozott részeket úgy, hogy egyenlő arányokat kapjatok:



a) $\dfrac{FA}{AG} = \ldots$; b) $\dfrac{EA}{AB} = \ldots$; c) $\dfrac{AG}{FG} = \ldots$.

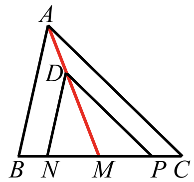
4. Az ABC háromszög BC oldalához húzott párhuzamos egyenes az AB és AC oldalt D illetve E pontban metszi úgy, hogy $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{1}{4}$. Határozzátok meg az $\dfrac{AE}{EC}, \dfrac{AE}{AC}, \dfrac{AC}{EC}$ arányok értékeit.

5. Az ABC háromszög AB és BC oldalán az M és N pont úgy helyezkedik el, hogy $MN \parallel AC$, $AM = 2$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm. Számítsátok ki a BN és NC szakaszok hosszát.

6. A d egyenes párhuzamos az MNP háromszög NP oldalával, az MN és MP oldalak meghosszabbítását az A illetve B pontban metszi. Számítsátok ki az AM és AN szakaszok hosszát tudva, hogy:
a) $BM = 3{,}6$ cm, $MP = 4{,}8$ cm és $MN = 6$ cm.
b) $\dfrac{BM}{BP} = \dfrac{2}{5}$ és $MN = 15$ cm.

7. Az $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontját jelölje O, $AB \parallel CD$, $AB > CD$ és $EO \parallel AB$, $E \in AD$. Tudjuk, hogy $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{4}{3}$, $DO = 6$ cm, $DE = 9$ cm. Határozzátok meg az AD és BD szakasz hosszát.

8. Az ABC háromszög oldalfelezője AM, ahol $M \in BC$ és D egy tetszőleges pont az AM szakaszon.



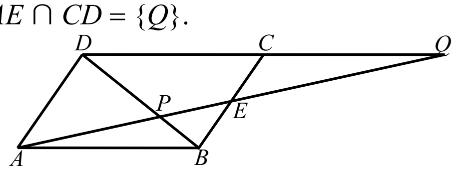
a) Ha $DN \parallel AB$ és $DP \parallel AC$, ahol $N, P \in BC$, igazoljátok, hogy DM a DNP háromszög oldalfelezője.
b) Tudva, hogy $\dfrac{AD}{DM} = \dfrac{1}{2}$ és $BC = 18$ cm, számítsátok ki az NP szakasz hosszát.

9. Legyen P az ABC háromszög BC oldalának egy tetszőleges pontja, valamint $PE \parallel AB$, $E \in AC$ és $PF \parallel AC$, $F \in AB$. Ha $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm és $PC = 2\,BP$, számítsátok ki az $AEPF$ négyszög kerületét.

10. Az $r = 5$ cm sugarú $\mathcal{C}(O, r)$, skör A pontjába húzott érintőn felvesszük a B pontot úgy, hogy $AB = 12$ cm.
a) Számítsátok ki az OB szakasz hosszát.
b) Az OB félegyenes C pontban metszi a kört és $CD \perp OA$, $D \in OA$. Számítsátok ki az OD szakasz hosszát.

11. Az ABC háromszögben $M \in AB$ és $MN \parallel BC$, $N \in AC$, $MP \parallel AC$, $P \in BC$.
Mutassátok ki, hogy $\dfrac{AN}{AC} + \dfrac{BP}{BC} = 1$.

12. A mellékelt ábrán $ABCD$ egy paralelogramma, E a BC oldal felezőpontja és $AE \cap BD = \{P\}$, $AE \cap CD = \{Q\}$.



a) Mutassátok ki, hogy $AP = 2\,PE$.
b) Mutassátok ki, hogy $AP^2 = PE \cdot PQ$.

2.ℓ. Thalész tételének fordított tétele

Emlékeztető

Egy háromszög egyik oldalával húzott párhuzamos a másik két oldalon, vagy az oldalak meghosszabbításain, arányos szakaszokat határoz meg.
Thalész tétele egy hasznos bizonyítási módszer szakaszok arányosságainak igazolására.

Mi a szükséges feltétele annak, hogy egy egyenes párhuzamos legyen a háromszög egyik oldalával?

Egy tételből kiindulva (direkt tétel) egy másik kijelentést fogalmazhatunk meg, amelyben a feltevés a direkt tétel kövekeztetése, valamint az új kijelentés következtetése a direkt tétel feltevése, vagy egy része ennek. Ezt a kijelentést a direkt tétel fordított tételének nevezzük.

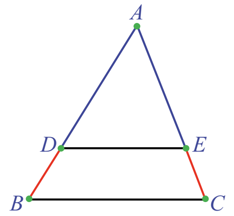
Egy tétel fordított tétele lehet igaz vagy hamis. Ha igaz, akkor fordított tételnek nevezzük és az eredmény használható más bizonyításoknál.

Bővebben: az ábra jelöléseit használva, Thalész tétele és fordítottja egy tetszőleges ABC háromszögre vonatkozik és egy egyenesre, amely a háromszög két oldalát a D és E pontokban metszi.

Thalész tétele

Feltevés
Egy egyenes párhuzamos a háromszög egyik oldalával.
$D \in AB$, $E \in AC$ és $DE \parallel BC$
Következtetés
Az egyenes metszéspontjai a háromszög két oldalán arányos szakaszokat határoznak meg

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



Thalész tételének fordított tétele

Feltevés
Egy egyenes a háromszög két oldalán arányos szakaszokat határoz meg.
$D \in AB$, $E \in AC$ és $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
Következtetés
Az egyenes párhuzamos a háromszög harmadik oldalával.

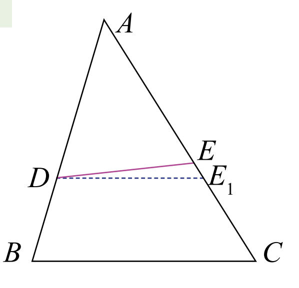
$$DE \parallel BC$$

Igazoljuk, hogy teljesül Thalész tételének fordított tétele. E fordított tétel segítségével könnyen kimutathatjuk két egyenes párhuzamosságát, szakaszok arányosságának ismeretében

Tétel. Thalész tételének fordított tétele
Ha egy egyenes egy háromszög két oldalán arányos szakaszokat határoz meg, akkor ez az egyenes párhuzamos a háromszög harmadik oldalával.

Megoldás: Az ABC háromszög AB illetve AC oldalait egy egyenes a D és E pontban metszi úgy, hogy $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. (1)

Igazolni fogjuk, hogy a DE párhuzamos a BC oldallal. A hamis feltevés módszerét alkalmazzuk, vagyis feltételezzük, hogy DE és BC nem párhuzamosak. Ekkor megszerkesztjük a D ponton keresztül a BC oldalhoz húzott párhuzamost amely az E_1 pontban metszi az AC oldalt.



Mivel az ABC háromszögben $DE_1 \parallel BC$ ezért Thalész tétele értelmében: $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE_1}{E_1C}$. (2)

Az (1) és (2) azonosságok alapján kapjuk, hogy $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AE_1}{E_1C}$, majd $\dfrac{AE}{AE + EC} = \dfrac{AE_1}{AE_1 + E_1C}$ és $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AE_1}{AC}$.

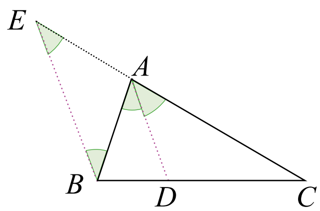
Innen következik, hogy $AE = AE_1$, ami pedig azt jelenti, hogy E és E_1 pontok egybeesnek.
Ellentmondáshoz jutottunk, tehát a feltevés hamis. Következésképpen, $DE \parallel BC$.
Az igazolt eredmény akkor is érvényes ha a D pont az AB oldal meghosszabításán van, ami maga után vonja, hogy az E az AC oldal meghosszabításán van.
Ennek bizonyítása ugyanezen gondolatmenet alapján történik, a megfelelő ábrák megváltoztatásával.

Alkalmazás

1. alkalmazás. A szögfelező tételének fordított tétele

Az ABC háromszög BC oldalán található D pont esetén $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$. Igazoljátok, hogy AD az A szög szögfelezője.

Megoldás: Az AC meghosszabbításán megszerkesztjük az E pontot úgy, hogy az AE és AB szakaszok egyenlő hosszúságúak legyenek, így $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AC}$. Mivel $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ ezért $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AC}$ vagyis az AD egyenes a BCE háromszög CE és CB oldalain arányos szakaszokat határoz meg, tehát Thalész fordított tétele értelmében az AD és BE egyenesek párhuzamosak.



Az AD és BE egyenesek párhuzamosak, tehát az AB szelő által meghatározott belső váltószögek kongruensek, azaz $BAD\sphericalangle \equiv ABE\sphericalangle$, valamint az AC szelő által meghatározott megfelelőszögek is kongruensek, tehát $DAC\sphericalangle \equiv AEB\sphericalangle$. Másrészt, az ABE háromszög egyenlő szárú, alapja BC, ezért $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle AEB$, ahonnan következik, hogy, $BAD\sphericalangle \equiv ABE\sphericalangle \equiv AEB\sphericalangle \equiv \sphericalangle DAC$. Következésképpen $BAD\sphericalangle \equiv DAC\sphericalangle$, tehát AD a $BAC\sphericalangle$ szög szögfelezője.

Feladat a portfólióba

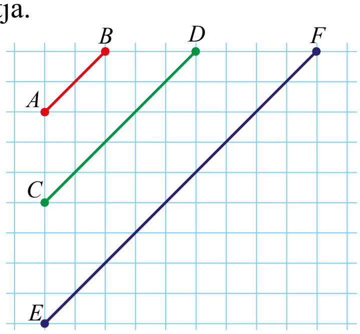
Ha az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja az átlókon arányos szakaszokat határoz meg, akkor igazoljátok, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz vagy paralelogramma.

Jegyezd meg!

Ha egy egyenes egy háromszög két oldalán arányos szakaszokat határoz meg, akkor ez az egyenes párhuzamos a háromszög harmadik oldalával.

Gyakorlatok, feladatok

1. Egy négyzethálós lapra az AB, CD és EF szakaszokat rajzoltuk, amint a mellékelt ábra mutatja.



Igazoljátok, hogy az AB, CD és EF egyenesek párhuzamosak.

2. Az ABC háromszögben $M \in AB$, $N \in AC$. Határozzátok meg az MN és BC egyenesek helyzetét a következő esetekben:

a) $AM = 4$ cm, $AN = 6$ cm, $MB = 10$ cm, $NC = 15$ cm.

b) $AB = 15$ cm, $BM = 9$ cm, $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{2}{3}$.

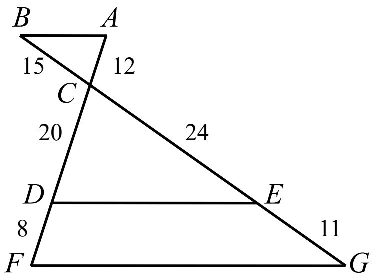
3. Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain felvesszük a D, E illetve F pontot úgy, hogy $AD = 3 \cdot BD$, $BC = 4 \cdot BE$ és $CF = 0{,}25\ AC$. Igazoljátok, hogy:

a) a DF és BC egyenesek párhuzamosak.

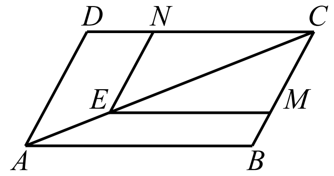
b) a DE és AC egyenesek párhuzamosak.

4. A CDE háromszögben $CD = 20$ cm és $CE = 24$ cm. Meghosszabbítjuk a CD oldalt az $AC = 12$ cm és $DF = 8$ cm szakaszokkal. Hasonlóan, a CE oldalt is meghosszabbítjuk a $CB = 15$ cm és $EG = 11$ cm szakaszokkal. Másoljátok le a füzetetekbe, majd döntéstek el a következő kijelentésekről, hogy igazak vagy hamisak. Indokoljátok a válaszotokat.

a) $DE \parallel FG$ b) $AB \parallel DE$ c) $AB \parallel FG$



5. Az $ABCD$ paralelogramma AC átlójának tetszőleges E pontján keresztül párhuzamosokat húzunk a paralelogramma oldalaihoz úgy, hogy $EM \parallel AB$, $M \in BC$ és $EN \parallel AD$, $N \in CD$. Igazoljátok, hogy $MN \parallel BD$.



6. Az ABC háromszög BC oldalának D a felezőpontja, a DE, DF az $ADB\sphericalangle$, illetve $ADC\sphericalangle$ szögfelezője $E \in AB$, $F \in AC$. Igazoljátok, hogy $EF \parallel BC$.

7. Az MNP egyenlő oldalú háromszög oldalain tekintjük az $R \in MN$, $S \in NP$ pontokat úgy, hogy $NR = PS = 12$ cm. Ha $MN = 18$ cm, akkor igazoljátok, hogy az RS egyenes párhuzamos az $NMP\sphericalangle$ szög szögfelezőjével.

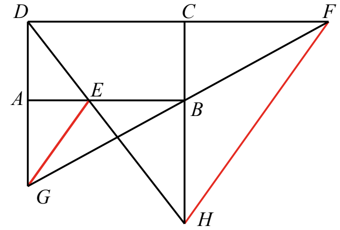
8. Az xOy hegyesszög szárait a $\mathcal{C}_1(O,r_1)$ kör az A és B pontokban metszi, valamint a $\mathcal{C}_2(O,r_2)$, $r_2 > r_1$, kör C és D pontokban metszi. Igazoljátok, hogy $AB \parallel CD$.

9. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, $E \in AC$, $F \in BC$, $G \in CD$, $AE = 1$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 8$ cm, $CF = 6$ cm.

a) Igazoljátok, hogy $EFCG$ trapéz.

b) Igazoljátok, hogy ha $GE \parallel AD$, akkor $FG \parallel BD$.

10. Legyen E az $ABCD$ téglalap AB oldalának egy tetszőleges pontja és F egy pont a CD oldal meghosszabbításán, amint a mellékelt ábra mutatja. Legyen $\{G\} = AD \cap BF$ és $\{H\} = DE \cap BC$. Igazoljátok, hogy $GE \parallel FH$.



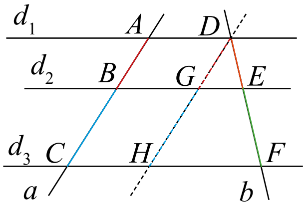
3.ℓ. Szakasz felosztása adott arányban

Emlékeztető

Egyenlő közű párhuzamos egyenesek bármely szelőn kongruens szakaszokat határoznak meg.
Az egyenlő közű párhuzamosok tételének gyakorlati alkalmazása egy szakasz felosztása n egyenlő részre.
Ez a tétel segített abban, hogy megértsük Thalész tételét, amely két összefutó egyenesen két párhuzamos által meghatározott arányos szakaszokhoz vezet.

Fedezzük fel, értsük meg!

Felmerülnek a következő kérdések:
1) Milyen összefüggés áll fenn három vagy több párhuzamos egyenes által két szelőn meghatározott szakaszok között?
2) Hogy tudunk felosztani egy szakaszt két vagy több részre adott arányosság szerint?

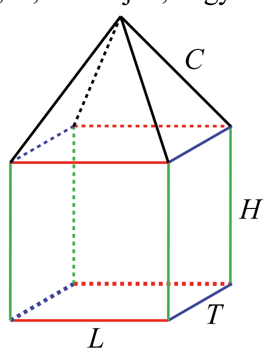


1. alkalmazás: Igazolni fogjuk, hogy három párhuzamos egyenes két teszelőleges szelőn arányos szakaszokat határoz meg.
Bizonyítás: A d_1, d_2, d_3 párhuzamos egyenesek az a szelőt az A, B, illetve C pontban, míg a b szelőt a D, E, illetve F pontban metszik.

Igazolni fogjuk, hogy $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

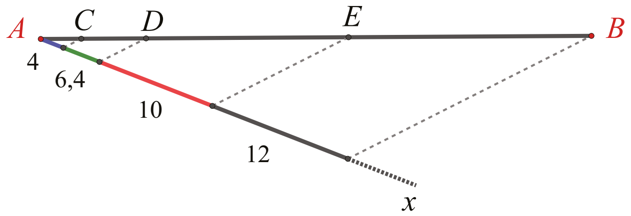
A D ponton keresztül párhuzamost húzunk az a egyeneshez, amely a d_2 és d_3 egyeneseket a G illetve H pontban metszi. Így az $ABGD$ és $BCHG$ paralelogrammák keletkeznek. A paralelogrammában a szemközti oldalak kongruensek, azaz $AB \equiv DG$ és $BC \equiv GH$. A DHF háromszögben $GE \parallel HF$, így Thalész tételét alkalmazva $\frac{DG}{GH} = \frac{DE}{EF}$. Majd felhasználva a bizonyított kongruenciákat kapjuk, hogy $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.
Hasonló eredményeket kapunk több párhuzamos egyenes esetén is.

2. alkalmazás: András barátja, Balázs egy 3 m hosszúságú lécből hasonló kalitkát szeretne építeni, mint András úgy, hogy a felhasznált lécek ne legyenek mind egyforma hosszúságúak.
A mellékelt ábra alapján az azonos színű szakaszok egyenlő hosszúságúak, jelölje őket L, T, H, C. Tudjuk, hogy: $\frac{L}{H} = \frac{H}{T} = 1,6$ (az aranymetszéshez nagyon közeli érték), valamint $\frac{C}{L} = 1,2$. Segítsünk Balázsnak megépíteni a kalitkát.



Megoldás: Egy tizedesnyi pontossággal mérünk. Feltételezzük, hogy a T szélesség 1 egység, vagyis $T = 1$. Ekkor a magasság $H = 1,6$, a hosszúság $L = 2,5$ valamint a tetőzethez szükséges lécek hossza $C = 3$.
Balázs a 300 cm hosszú lécből, az 1; 1,6; 2,5 és 3 számmal arányos hosszúságú négy-négy lécet kell nyerjen.
A tervezéshez először papírt, ceruzát és mértani ismereteket használunk. Rajzolunk egy AB szakaszt, amely a 300 cm hosszúságú lécet jelképezi, valamint az A ponton keresztül tetszőleges AX félegyenesen egy $4 \cdot 1 = 4$ cm hosszúságú szakaszt.

Ennek meghosszabításán egy $4 \cdot 1{,}6 = 6{,}4$ cm, majd egy $4 \cdot 2{,}5 = 10$ cm, végül pedig egy $4 \cdot 3 = 12$ cm hosszúságú szakaszt veszünk fel. Az utolsó szakasz végpontját összekötjük a B ponttal, majd ezzel párhuzamosokat húzunk az ábrán látható módon, így kapjuk a C, D és E pontot. A nem egyenlő közű párhuzamosok tétele szerint a következő egyenlő arányok sorozatát kapjuk.



$\dfrac{AC}{4} = \dfrac{CD}{6{,}4} = \dfrac{DE}{10} = \dfrac{EB}{12} = \dfrac{AC + CD + DE + EB}{4 + 6{,}4 + 10 + 12} = \dfrac{300}{32{,}4} = 9{,}259\ldots \approx 9{,}2$ ahol az utolsó egyenlőségek az egyenlő arányok sorozatának tulajdonságából adódnak.

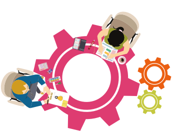
Ezek alapján az $AC = 36{,}8$ cm, $CD = 59$ cm, $DE = 92$ cm és $EB = 110{,}4$ cm hosszúságú szakaszhoz jutunk, így meghatározhatjuk a szükséges 16 darab léc hosszúságát.

A kalitka méretei, tehát $L = DE : 4 \approx 23$ cm, $T = AC : 4 = 9{,}2$ cm, $H = CD : 4 = 14{,}7$ cm és $C = EB : 4 = 27{,}6$ cm. Minden méretből négy-négy léc szükséges.

Ezzel a módszerrel a gyakorlatban feloszthatunk egy szakaszt adott számokkal arányos részekre.

Az AB szakaszt feloszthatjuk az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számokkal arányos részekre, a következő eljárás szerint:

1) Szerkesztünk egy tetszőleges AX félegyenest, amelyen felvesszük a $P_1, P_2, \ldots, P_n$, pontokat úgy, hogy $AP_1 = a_1$, $P_1P_2 = a_2$, ... , $P_{n-1}P_n = a_n$.
2) Összekötjük a P_n és B pontokat, majd a P_nB szakasszal párhuzamosokat szerkesztünk a $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ pontokon keresztül.
3) Jelölje $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ ezen párhuzamosok metszéspontját az AB szakasszal. Így az $AQ_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$ szakaszokat kapjuk:
4) A nem egyenlő közű párhuzamosok tétele szerint ezek a szakaszok arányosak adott számokkal, vagyis
$$\frac{AQ_1}{a_1} = \frac{Q_1Q_2}{a_2} = \frac{Q_2Q_3}{a_3} = \ldots = \frac{Q_{n-1}B}{a_n} = \frac{AB}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$



Gyakorlatok, feladatok

1. Az ABC háromszögben az AB szakasz tetszőleges D és F pontjain keresztül megszerkesztjük a $DE \parallel FG \parallel BC$ párhuzamosokat, ahol az E és G pontok az AC szakasz pontjai. Ha $AE = 4$ cm, $AG = 6$ cm, $EC = 7$ cm, $AB = 22$ cm, határozzátok meg az AD, DF, FB szakaszok hosszát.

2. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, az MN szakasz a trapéz középvonala úgy, hogy $M \in AD$, $N \in BC$, valamint a PQ szakasz a $CDMN$ trapéz középvonala, $P \in DM$ és $Q \in CN$.
Ha $AP = 12$ cm és $NQ = 4$ cm, határozzátok meg a DP, BN és CQ szakaszok hosszát.
Ellenőrizzétek, hogy $ABCD$ trapéz egyenlő szárú.

3. Az $AB = 125$ mm hosszúságú szakaszt a P pont az 5 és 7,5 számokkal egyenesen arányos részekre osztja. Határozzátok meg az AP és PB szakaszok hosszát.

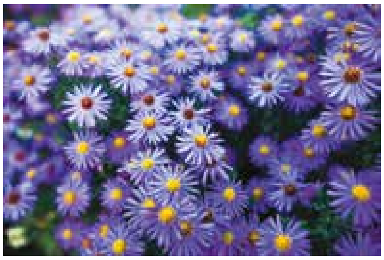
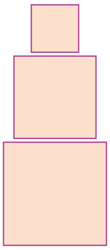
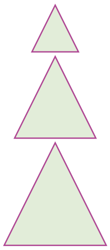
4. Az A, B, C, D, E pontok kollineárisak ebben a sorrendben úgy, hogy $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 6$ cm, $DE = 7$ cm. Ezen pontokon keresztül párhuzamosokat szerkesztünk, amelyek egy tetszőleges $d \neq AB$ egyenest az M, N, P, Q illetve R pontokban metszenek. Számítsátok ki az MN, PQ, NR szakaszok hosszát a következő esetekben:
a) $MR = 33$ cm
b) $NP = 2{,}5$ cm.

5. Az A és B pont az MN szakasz két belső pontja úgy, hogy $MB > MA$ és $MN = 0{,}51$ m. Az MA, AB, BM szakaszok hosszúságát centiméterben természetes számok fejezik ki, amelyek egyenesen arányosak három egymás utáni, növekvő sorrendbe rendezett természetes számmal. Határozzátok meg az MA, AB, BM szakasz hosszát.

6.3. Hasonló háromszögek. A hasonlóság alaptétele. A háromszögek hasonlósági esetei

1.ℓ. Hasonló háromszögek. A hasonlóság alaptétele



Két alakzatról az mondjuk, hogy *hasonlók*, ha *ugyanazon tulajdonságokkal* rendelkeznek. A Párizsban található Diadalív hasonló építészeti sajátosságokkal rendelkezik, mint a bukaresti; a csikó és szülei akárcsak a növény virágai nagyon hasonlítnak egymásra.
Az ábrákon található geometriai alakzatok hasonlók, de nem kongruensek, mert méreteik különbözők. A mértani alakzatok tulajdonságai az oldalak és szögek számára illetve méretére vonatkoznak.
Megfigyelhetjük, hogy az ábrán látható háromszögek egyenlő oldalúak, tehát szögeik kongruensek, de oldalaik egyre kisebbek.
Bizonyos esetekben az alakzatok méretei annyira nagyok, hogy csak egy csökkentett méretű modellt tudunk elkészíteni, amely megőrzi a tulajdonságokat.

Példa. Az udvaron egy derékszögű háromszög alakú homokozót szeretnénk kialakítani, amelynek befogói 4 m illetve 2 m hosszúságúak. A részletek megállapításához vázlatot készítünk. Mivel a lapra nem tudunk rajzolni ilyen méretekkel rendelkező háromszöget, így egy hasonló derkészögű háromszöget szerkesztünk, amelynek egyik befogója fele a másiknak.

Emlékeztető

Két háromszögről azt mondjuk, hogy kongruensek, ha megfelelő oldalaik és szögeik kongruensek.
A háromszögek kongruencia eseteire hivatkozva igazolni tudjuk két háromszögről, hogy kongruensek, három kongruens elempár bizonyításával a hat helyett.

Fedezzük fel, értsük meg!

Az O.O.O. kongruencia eset igazolja, hogy nem létezik két háromszög, amelyekben a megfelelő oldalak kongruensek, de a megfelelő szögek nem.
Feltevődik a következő kérdés: létezik-e két olyan háromszög, amelyekben a megfelelő szögek kongurensek anélkül, hogy a megfelelő oldalak is kongruensek lennének?

Gyakorlati foglalkozás: A fenti kérdésre a választ keresve párban fogtok dolgozni, vagyis két fős csoportokba szerveződtök. A következőkre van szükségetek: papír, ceruza, mértani felszerelés, olló.

1) A csapat egyik tagja megszerkeszti az ABC háromszöget, amelyben: $A\sphericalangle = 40^\circ$, $B\sphericalangle = 60^\circ$, $AB = 8$ cm. Közben a másik tagja az MNP háromszöget szerkeszti meg a $M\sphericalangle = 40^\circ$, $P\sphericalangle = 80^\circ$, $MN = 4$ cm méretekkel.
2) Beosztásos vonalzóval mérjétek meg az AC és BC valamint az MP és NP szakasz hosszát.
3) Másoljátok le a füzetetekbe az alábbi táblázatot, majd töltsétek ki a kapott mérési eredményekkel!

AB	MN	$\frac{AB}{MN}$	AC	MP	$\frac{AC}{MP}$	BC	NP	$\frac{BC}{NP}$
8 cm	4 cm	2						

4) Vágjátok ki a két háromszöget!
5) A kisebbik háromszög M szögének szárait tegyétek rá a nagyobbik háromszög A szögének száraira, betartva a jelölés sorrendjét: az MN félegyenes az AB félegyenesen, míg az MP félegyenes az AC félegyenesen legyen.

Megfigyelések:

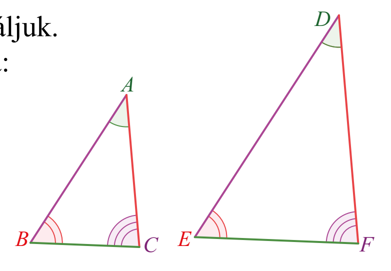
a) Végtelen sok olyan háromszöget szerkeszthetünk, amelyeknek a megfelelő szögei kongruensek az ABC háromszög szögeivel úgy, hogy a megfelelő oldalak hosszúsága különböző legyen.
b) Bármely két ilyen háromszög megfelelő oldalai arányosak.

Értelmezés. Két háromszögről azt mondjuk, hogy hasonlók, ha megfelelő szögeik kongruensek és megfelelő oldalaik arányosak.

Két megfelelő oldal arányát hasonlósági aránynak nevezzük.
Az ABC és DEF háromszögek hasonlóságára az $ABC\Delta \sim DEF\Delta$ jelölést használjuk.
A mellékelt ábrák jelöléseit használva, az értelmezés szerint $ABC\Delta \sim DEF\Delta$ ha:

A két háromszög *megfelelő szögei kongruensek*. $A\sphericalangle \equiv D\sphericalangle,\ B\sphericalangle \equiv E\sphericalangle,\ C\sphericalangle \equiv F\sphericalangle$

A két háromszög *megfelelő oldalai arányosak.* $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$



Észrevétel: A hasonlóság felírásának sorrendje megőrzi a megfelelő csúcsok sorrendjét.
Az arányos oldalak sorrendje megőrzi a megfelelő csúcsok által adott sorrendet.
Két háromszög közötti hasonlósági reláció helyes felírásához figyelembe kell vennünk a következőket:

– a kongruens szögpárokat: $(A\sphericalangle, D\sphericalangle)$, $(B\sphericalangle, E\sphericalangle)$, $(C\sphericalangle, F\sphericalangle)$;
– Az ABC háromszög A szögével szemközti oldalnak a DEF háromszög D szögével szemközti oldal felel meg. Így az (AB, DE), (BC, EF), (AC, DF) oldalpárok megfelelőek;
– A megfelelő oldalak arányosságát a következőképpen írjuk: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

Tulajdonságok.

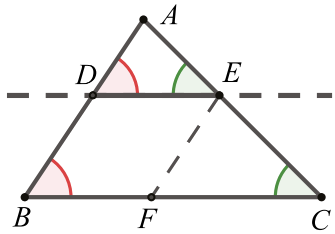
1) Minden háromszög hasonló önmagával: $ABC\Delta \sim ABC\Delta$.
2) Ha $ABC\Delta \sim DEF\Delta$, akkor $DEF\Delta \sim ABC\Delta$.
3) Ha $ABC\Delta \sim DEF\Delta$ és $DEF\Delta \sim MNP\Delta$, akkor $ABC\Delta \sim MNP\Delta$.
4) Ha két hasonló háromszög esetén a hasonlósági arány 1, akkor a két háromszög megfelelő oldalai kongruensek, vagyis a két háromszög kongruens.

Alkalmazás

Olyan mértani szerkesztéseket szeretnénk találni, amelyek segítségével hasonló háromszögeket kapunk. Ebben a következő tétel segít:

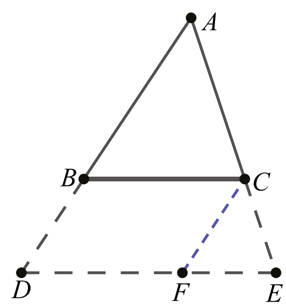
A hasonlóság alaptétele
Egy háromszög egyik oldalával párhuzamosan húzott egyenes a háromszög másik két oldalával vagy azok meghosszabításaival az eredetihez hasonló háromszöget alkot.

Bizonyítás: Az ABC háromszögben d egyenes párhuzamos a háromszög BC oldalával. A d egyenes metszi a háromszög két oldalát vagy ezek meghosszabításait.

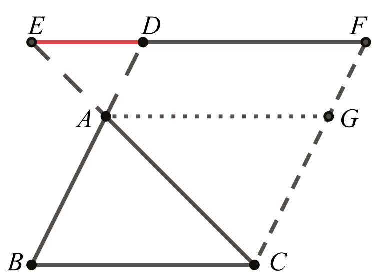


I. A d egyenes az AB és AC oldalt a D illetve E pontban metszi. Igazoljuk, hogy az így keletkezett ADE háromszög hasonló az eredeti ABC háromszöghöz.
a) A szögek kongruenciája: Mivel $DE \parallel BC$, így a DB és EC szelők által meghatározott megfelelő szögek kongruensek, azaz $ADE\sphericalangle \equiv ABC\sphericalangle$, illetve $AED\sphericalangle \equiv ACB\sphericalangle$. Másrészt a $DAE\sphericalangle$ és $BAC\sphericalangle$ szögek egybeesnek, tehát kongruensek.
b) Az oldalak arányossága: Mivel az ABC háromszögben $DE \parallel BC$, Thalész tételéből következik, hogy $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (1). Az E ponton keresztül az AB oldalhoz húzott párhuzamos a BC oldalt az F pontban metszi.
Mivel $EF \parallel AB$, így Thalész tétele értelmében $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$. Másrészt, a $DEFB$ négyszög paralelogramma,
tehát $DE \equiv BF$. Ezt felhasználva az előző aránypárból kapjuk, hogy $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ (2). Figyelembe véve az (1)
és a (2) aránypárt kapjuk, hogy $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, vagyis a megfelelő oldalak arányosságát.

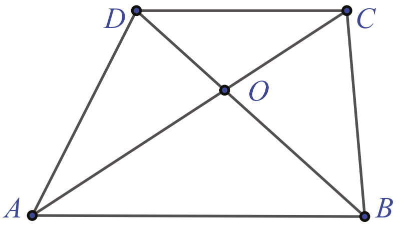
Bebizonyítottuk, hogy az ADE és ABC háromszögek megfelelő szögei kongruensek, és a megfelelő oldalai arányosak, így az értelmezés szerint a két háromszög hasonló.



II. A d egyenes metszi a háromszög oldalainak meghosszabításait.
a) A B pont rajta van az AD szakaszon, a C pont az AE szakaszon valamint $DE \parallel BC$. Az ADE háromszögben a BC egyenes párhuzamos a háromszög DE oldalával, így teljesülnek az I. eset feltételei. Felhasználva a bizonyított eredményt következik, hogy a két háromszög hasonló.
b) Az A pont a BD és CE szakaszok metszépontja, valamint $DE \parallel BC$. Így a BD szelő által meghatározott belső váltószögek kongruensek, azaz $ADE\sphericalangle \equiv ABC\sphericalangle$. Ugyanúgy a CE szelő által meghatározott belső váltószögek is kongruensek, tehát $AED\sphericalangle \equiv ACB\sphericalangle$.
Másrészt, $DAE\sphericalangle \equiv BAC\sphericalangle$ (csúcsszögek). (1)
Megszerkesztjük a $CF \parallel AD$, $F \in DE$ és $AG \parallel BC$, $G \in CF$ párhuzamosokat, így $BC \parallel AG \parallel DF$.
Ekkor a $BCFD$, $AGFD$ és $BCGA$ négyszögek paralelogrammák, innen pedig következik, hogy $DF \equiv BC$, $GF \equiv AD$ és $GC \equiv AB$.
A CEF háromszögben $AG \parallel EF$, tehát teljesülnek az I. eset feltételei.
Thalész tételét alkalmazva kapjuk, hogy $\frac{AE}{AC} = \frac{GF}{GC}$ vagy $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$.
A CEF háromszögben $AD \parallel CF$, tehát teljesülnek az I. eset feltételei.
Thalész tételét alkalmazva kapjuk, hogy: $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DF}$ vagy $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.
Következésképpen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ és figyelembe véve az (1) kongruenciákat következik, hogy $ADE\Delta \sim ABC\Delta$.



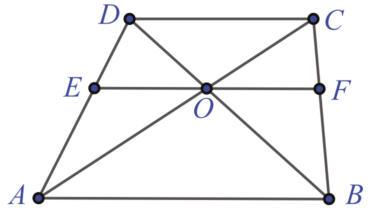
1. alkalmazás. Az $ABCD$ trapéz alapjai AB, CD; $\{O\} = AC \cap BD$. Igazoljátok, hogy az O pont a trapéz AC és BD átlóit az alapok arányával egyenlő arányra osztja.



Megoldás. Az OAB háromszögben $DC \parallel AB$.
A hasonlóság alaptételének értelmében: $OCD\Delta \sim OAB\Delta$.

Így a megfelelő oldalak arányosak, vagyis $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{CD}{AB}$, tehát az O pont az átlókat $\dfrac{CD}{AB}$ aránnyal egyenlő arányra osztja.

2. alkalmazás. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel DC$ és $\{O\} = AC \cap BD$. Az O ponton keresztül az alapokkal húzott párhuzamos egyenes a trapéz AD és BC oldalait az E illetve F pontban metszi. Igazoljátok, hogy az O pont az EF szakasz felezőpontja.



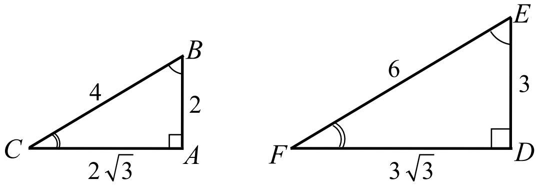
Megoldás. Összehasonlítjuk az OE és OF szakaszokat. Ezek tartóegyenese az EF egyenes, amely párhuzamos az AB alappal. A hasonlóság alaptételének értelmében a $DEO\Delta \sim DAB\Delta$, tehát $\dfrac{DE}{DA} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{EO}{AB}$, valamint $COF\Delta \sim CAB\Delta$, így $\dfrac{CO}{CA} = \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{OF}{AB}$. De $COD\Delta \sim AOB\Delta$ (1.alkalmazás) és $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OD}{OB}$, innen pedig származtatással kapjuk, hogy $\dfrac{OC}{AC} = \dfrac{OD}{BD}$. Összehasonlítva az első két egyenlő aránysorozatot az utolsó aránypárral következik, hogy $\dfrac{EO}{AB} = \dfrac{OF}{AB}$, amely egyenértékű azzal, hogy $EO \equiv OF$, vagyis az O pont az EF szakasz felezőpontja.

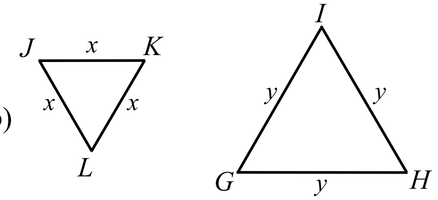
Jegyezd meg!

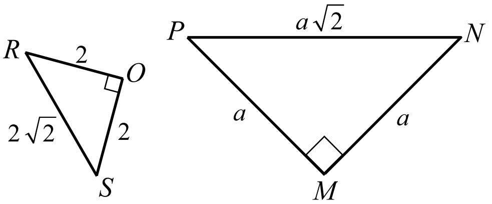
- Két háromszögről azt mondjuk, hogy hasonlók, ha megfelelő szögeik kongruensek és megfelelő oldalaik arányosak.
- Egy háromszög egyik oldalával párhuzamosan húzott egyenes a háromszög másik két oldalával vagy azok meghosszabbításaival az eredetihez hasonló háromszöget alkot.

Gyakorlatok, feladatok

1. Az értelmezést felhasználva igazoljátok, hogy a következő háromszögpárok hasonlók. Mindegyik pár esetén írjátok fel a megfelelő oldalak és szögek közötti összefüggéseket.

a)


b)


c)


2. Az ABC és DEF háromszögek hasonlók.

a) Ha $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $EF = 7{,}5$ cm, $DF = 9$ cm számítsátok ki az AC és DE szakaszok hosszát.

b) Ha $A\sphericalangle = 30°$ és $F\sphericalangle = 70°$, határozzátok meg az $B\sphericalangle$, $C\sphericalangle$, $D\sphericalangle$, $E\sphericalangle$ szögek mértékéit.

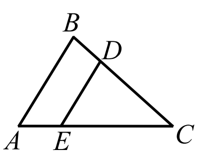
c) Ha $AB = 15$ cm, $BC = 24$ cm, $AC = 18$ cm és $\mathcal{K}_{DEF\Delta} = 76$ cm, számítsátok ki a DE, EF, FD szakaszok hosszát.

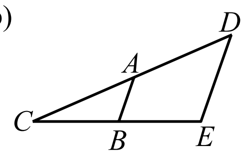
3. Ha $ABC\Delta \sim MNP\Delta$, $AB = 8$ cm, $MN = 6$ cm, $NP = 9$ cm, $PM = 12$ cm, számítsátok ki az ABC háromszög kerületét.

4. Ha $ABC\Delta \sim DEF\Delta$, $A\sphericalangle + C\sphericalangle = 80^\circ + B\sphericalangle$ és $D\sphericalangle = 65^\circ$, számítsátok ki a DEF háromszög szögeinek mérétkét.

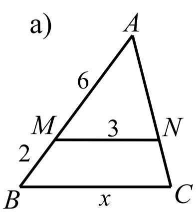
5. A GEO és MAT hasonló háromszögek esetén a hasonlósági arány $k = \frac{2}{5}$. Tudjuk, hogy $GE = 4$ cm, $GE + 2\,EO = 13{,}6$ cm és $\frac{1}{4}GE + \frac{1}{3}EO + OG = 7{,}8$ cm. Határozzátok meg a MAT háromszög oldalainak hosszát.

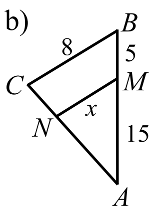
6. A mellékelt két ábrán $DE \parallel AB$. Írjátok fel azokat az egyenlő arányokat, amelyeket a hasonlóság alaptételének alkalmazásával kapunk.

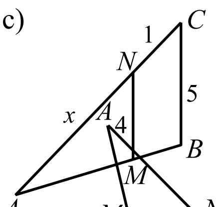
a) 

b) 

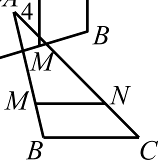
7. Az ABC háromszögben $M \in AB$, $N \in AC$ és $MN \parallel BC$. Határozzátok meg az x szám értékét mindhárom esetben.

a) 

b) 

c) 

8. A mellékelt ábrán látható ABC háromszögben $M \in AB$, $N \in AC$ és $ANM\sphericalangle \equiv ACB\sphericalangle$.



a) Igazoljátok, hogy az AMN és ABC háromszögek hasonlók. Írjátok fel azokat az egyenlő arányokat, amelyeket a hasonlóság alaptételének alkalmazásával kapunk.

b) Ha $AMN\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 134°$, határozzátok meg a $BAC\sphericalangle$ szög mérékét.

9. A DEF háromszög DE és DF oldalain jelöljük az A és B pontot úgy, hogy $\frac{AD}{AE} = \frac{3}{5}$ és $\frac{BF}{DF} = \frac{5}{8}$.

a) Igazoljátok, hogy $AB \parallel EF$.

b) Tudva, hogy $EF = 3{,}6$ cm, határozzátok meg az AB szakasz hosszát.

10. Az ABC háromszögben $P, Q \in AB$ és $M, N \in AC$, úgy, hogy $PM \parallel QN \parallel BC$. Tudjuk, hogy $AP = PM = 3$ cm, $AM = 5$ cm, $AQ = 7{,}8$ cm, $AB = 10{,}5$ cm.

a) Határozzátok meg a PQ, AN, BC szakaszok hosszát.

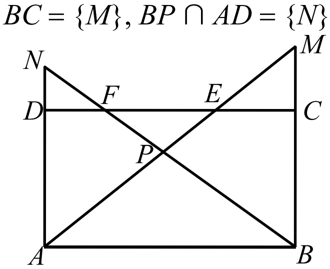
b) Számítsátok ki a $BCNQ$ trapéz kerületét.

11. Az $ABCD$ trapézben $AB \parallel CD$, $AD \cap BC = \{E\}$ valamint $AB = 7{,}5$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 3$ cm, $AD = 4{,}5$ cm. Határozzátok meg az EA, EB, EC és ED szakaszok hosszát.

12. Az $ABCD$ paralelolgrammában $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm, a CD oldalon felvesszük az E pontot úgy, hogy $CE = 3 \cdot DE$, majd $AE \cap BC = \{F\}$. Határozzátok meg az EC és CF szakaszok hosszát.

13. Az $ABCD$ trapéz AD és BC nem párhuzamos oldalain adott az E, illetve F pont úgy hogy, $EF \parallel AB$ és $\frac{AE}{ED} = \frac{2}{7}$. Tudva, hogy $AB = 24$ cm és $CD = 6$ m, számítsátok ki az EF szakasz hosszát.

14. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 24$ cm, $BC = 15$ cm, a CD oldalán felvesszük az E és F pontokat úgy, hogy $CE = \frac{AB}{3}$, $DF = \frac{CD}{4}$. Az AE és BF egyenesek a P pontban metszik egymást, valamint $AP \cap BC = \{M\}$, $BP \cap AD = \{N\}$.



a) Határozzátok meg az AN és BM szakaszok hosszát.

b) Számítsátok ki a P pont távolságát az AB egyenestől.

15. Az ABC háromszög G súlypontján keresztül megszerkesztjük a $GK \parallel BC$, $K \in AB$, $GL \parallel AC$, $L \in BC$ és $GM \parallel AB$, $M \in AC$ párhuzamosokat. Tudva, hogy az ABC háromszög kerülete 18 cm, számítsátok ki a $GK + GL + GM$ összeget.

2.ℓ. A háromszögek hasonlósági esetei

Emlékeztető

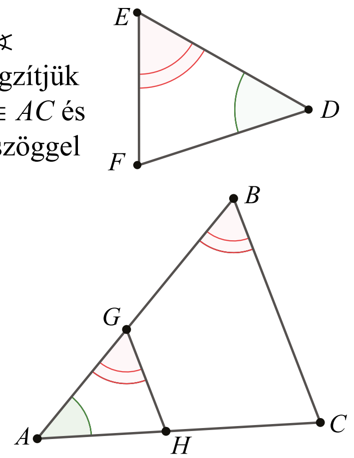
Két háromszögről azt mondjuk, hogy **kongruensek**, ha megfelelő oldalaik és szögeik kongruensek.

Két háromszögről azt mondjuk, hogy **hasonlók**, ha megfelelő szögeik kongruensek és megfelelő oldalaik arányosak.

Ahhoz, hogy két háromszögről igazoljuk, hogy kongruensek, az értelmezést használva be kell bizonyítanunk a három szögpár illetve a három oldalpár kongruenciáját. A háromszögek kongruencia esetei elégséges feltételt adnak két háromszög kongruenciájának bizonyításához: (O.Sz.O.); (Sz.O.Sz.); és (O.O.O.).
Hasonlóképpen, elégséges feltételeket keresünk két háromszög hasonlóságának kimutatásához.

Fedezzük fel, értsük meg!

1. tétel. (a Sz.Sz. hasonlósági eset)
Ha két háromszögben két-két szög rendre kongruens, akkor a két háromszög hasonló.

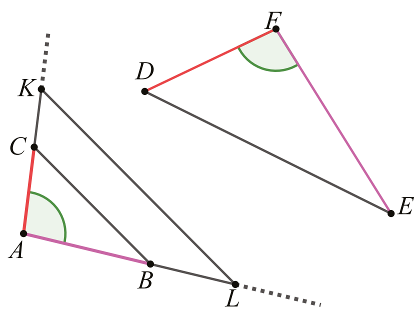


Bizonyítás. Az ABC és DEF háromszögekben a $BAC\sphericalangle \equiv EDF\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle \equiv DEF\sphericalangle$ kongruens szögpárok. Az ABC háromszög AB oldalán (vagy az AB félegyenesen) rögzítjük a G pontot úgy, hogy $AG \equiv DE$. Majd megszerkesztjük a GH szakaszt úgy, hogy $H \in AC$ és $AGH\sphericalangle \equiv DEF\sphericalangle$. Így létrejött az AGH háromszög, amely kongruens a DEF háromszöggel (Sz.O.Sz.). Ebből következik, hogy: $GH \equiv EF$, $AH \equiv DF$ és $AHG\sphericalangle \equiv DFE\sphericalangle$.
Tehát elégséges igazolnunk, hogy az ABC és AGH háromszögek hasonlóak. Mivel $ABC\sphericalangle \equiv DEF\sphericalangle$ és $DEF\sphericalangle \equiv AGH\sphericalangle$, ezért $ABC\sphericalangle \equiv AGH\sphericalangle$, de ezek a szögek a GH és BC egyeneseken az AB szelő által meghatározott megfelelő szögek, így $GH \parallel BC$.
Az ABC háromszögben $GH \parallel BC$, így a hasolóság alaptétele értelmében
$\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{GH}{BC}$.

Másrészt, a DEF és AGH háromszögek oldalai kongruensek, így kapjuk, hogy

$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, ami éppen a DEF és ABC háromszögek oldalainak arányossága. A háromszög szögeinek összege $180°$, tehát $DFE\sphericalangle = 180° - DEF\sphericalangle - EDF\sphericalangle = 180° - ABC\sphericalangle - BAC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$. Mivel a két háromszög megfelelő szögei kongruensek és megfelelő oldalai arányosak következik, hogy $DEF\Delta \sim ABC\Delta$.

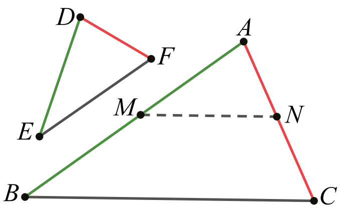
2. tétel. (az O.Sz.O. hasonlósági eset)
Ha két háromszög két-két oldala arányos és a két oldal által közrezárt szög kongruens, akkor a két háromszög hasonló.



Bizonyítás. Az ABC és DEF háromszögek esetén legyen $BAC\sphericalangle \equiv EDF\sphericalangle$ és a szögeket alkotó oldalak arányosak: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.
Az AB és AC félegyeneseken felvesszük az L illetve K pontokat úgy, hogy $AL \equiv DE$ és $AK \equiv DF$. Mivel $LAK\sphericalangle \equiv BAC\sphericalangle \equiv EDF\sphericalangle$ következik, hogy $ALK\sphericalangle \equiv DEF\sphericalangle$, tehát $LK \equiv EF$, $ALK\Delta \equiv DEF\Delta$ és $AKL\sphericalangle \equiv DFE\sphericalangle$.
A feltevésben adott $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ aránypárból kapjuk, hogy $\frac{AB}{AL} = \frac{AC}{AK}$. Az ABC háromszögben az L és K pontok az oldalak tartóegyeneseinek pontjai, így Thalész fordított tételének értelmében következik, hogy $BC \parallel LK$.

A hasonlóság alaptétele szerint $ABC\Delta \sim ALK\Delta$, ezért $\dfrac{AB}{AL} = \dfrac{AC}{AK} = \dfrac{BC}{LK}$, valamint a bizonyított kongruenciák alapján $BAC\sphericalangle \equiv EDF\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle \equiv DEF\sphericalangle$, $ACB\sphericalangle \equiv DFE\sphericalangle$ és $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$, ahonnan következik, hogy az ABC és a DEF háromszögek hasonlóak.

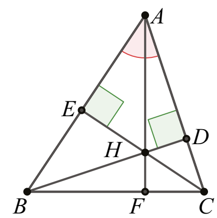
3. tétel. (az O.O.O. hasonlósági eset)
Ha két háromszög megfelelő oldalai arányosak, akkor a két háromszög hasonló.



Bizonyítás: Az ABC és DEF háromszögek esetén $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$. Igazolnunk kell, hogy a háromszögek megfelelő szögei kongruensek. Ezért az ABC háromszög AB és AC oldalain felvesszük az M illetve N pontokat úgy, hogy $AM \equiv DE$ és $AN \equiv DF$. Ekkor $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ így Thalész tételének fordított tétele alapján $MN \parallel BC$.

A hasolóság alaptétele szerint $ABC\Delta \sim AMN\Delta$, ezért $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$. Figyelembe véve az $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ és $AM \equiv DE$ összefüggéseket következik, hogy az előző hat arány egyenlő, tehát $\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{BC}{EF}$ így $EF \equiv MN$. Következésképpen a DEF és AMN háromszögek kongruensek (O.O.O.). Igazoltuk, hogy $ABC\Delta \sim AMN\Delta$, ezért $BAC\sphericalangle \equiv MAN\sphericalangle \equiv EDF\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle \equiv AMN\sphericalangle \equiv DEF\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle \equiv ANM\sphericalangle \equiv DFE\sphericalangle$. Mivel a két háromszög hasonlóságára vonatkozó értelmezés összes feltétele teljesül, következik, hogy $ABC\Delta \sim DEF\Delta$.

Alkalmazás



Olyan mértani szerkesztéseket keresünk, amelyek hasonló háromszögekhez vezetnek. Ebben segítnek a következő tulajdonságok:

1. alkalmazás. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságai a BD és CE szakaszok.
a) Igazoljátok, hogy az ADB és AEC háromszögek hasonlók.
b) Írjátok fel a két háromszög megfelelő szögeinek kongruenciáját, valamint a megfelelő oldalak arányosságait.

Megoldás.
a) Az ADB és AEC háromszögek közös csúcsa az A. Az A szöggel szemközti oldalak a BD, illetve CE magasságok, tehát a háromszögek derékszögűek, azaz $ADB\sphericalangle = AEC\sphericalangle = 90°$. Mivel az A szög közös a két háromszögben, ezért $ADB\Delta \sim AEC\Delta$.
b) Megállapítjuk a két háromszögben a megfelelő szögeket:
$A\sphericalangle \equiv A\sphericalangle$, $ADB\sphericalangle \equiv AEC\sphericalangle$ és $ABD\sphericalangle \equiv ACE\sphericalangle$. A megfelelő oldalpárok (BD, CE), (AB, AC) és (AD, AE) arányosak, tehát $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE}$.

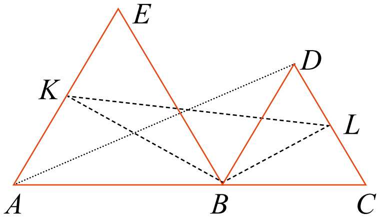
Észrevétel: Az alkalmazás eredménye a ($BDC\Delta$, $AFC\Delta$), illetve ($AFB\Delta$, $CEB\Delta$) háromszögpárokra is érvényes.
Megjegyzés. Az első két arány egyenlőségéből következik, hogy $BD \cdot AC = CE \cdot AB$. háromszögek hasonlóságából kapjuk, hogy $AF \cdot BC = CE \cdot AB$, vagyis $BD \cdot AC = CE \cdot AB = AF \cdot BC$. Az eredmények alapján a következő fontos kijelentést tehetjük: Egy háromszögben az egyik oldal és a hozzá tartozó magasság hosszának szorzata állandó. Ha a $a = BC$, $b = AC$, $c = BC$ jelöléseket használjuk, valamint h_a, h_b, h_c az oldalaknak megfelelő magasságok, akkor: $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.
Megfigyelés: A fent kapott szorzatok értéke az ABC háromszög területének kétszerese.

$$\mathcal{T}_{ABC\Delta} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{CE \cdot AB}{2} = \frac{AF \cdot BC}{2}.$$

Feladat a portfólióba

Igazoljátok, hogy a fenti alkalmazás eredménye érvényes derékszögű illetve tompaszögű háromszögekben is.

2. alkalmazás. Az ABE és BCD egyenlő oldalú háromszögek, $B \in AC$, a K és L pontok az AE illetve CD oldalak felezőpontjai. Igazoljátok, hogy: a) $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BL}$; b) $ABD\Delta \sim KBL\Delta$.



Megoldás. a) A BK és BL szakaszok oldalfelezők az egyenlő oldalú háromszögekben, így szögfelezők is: $ABK\sphericalangle = CBL\sphericalangle = 30°$. Az ABK és CBL háromszögekben egy-egy szög 60 fokos illetve egy-egy szög 30 fokos. Az Sz.Sz. hasonlósági eset alapján a két háromszög hasonló, innen következik, hogy $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BL}$.

b) Igazoljuk, hogy az ABD és KBL háromszögek hasonlók. A két háromszög oldalai az AB, BD, AD illetve KB, BL, KL szakaszok.

Mivel $BC = BD$, a fent igazolt azonosságból kapjuk, hogy $\frac{AB}{BD} = \frac{BK}{BL}$ vagy $\frac{AB}{BK} = \frac{BD}{BL}$. Még be kell bizonyítanunk, hogy az $ABD\sphericalangle$ és $KBL\sphericalangle$ szögek kongruensek.

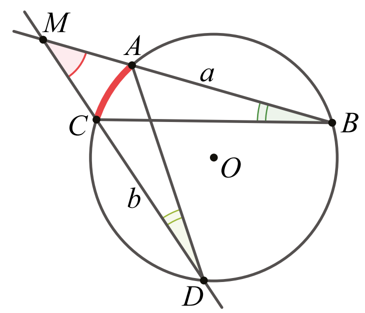
$ABD\sphericalangle = ABC\sphericalangle - DBC\sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ = 120°$, valamint

$KBL\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABK\sphericalangle - CBL\sphericalangle = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120°$.

Az O.Sz.O. hasonlósági eset alapján következik, hogy $ABD\Delta \sim KBL\Delta$.

3. alkalmazás. Az M pont nincs rajta a $\mathcal{C}(O,R)$. körön. Az M ponton áthaladó a és b szelők a kört az A és B illetve C és D pontokban metszi. Igazoljátok, hogy: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

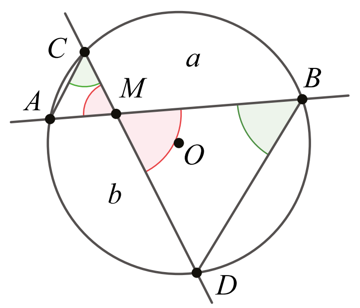
Megoldás. Két esetet különítünk el: $M \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O,R)$ és $M \in \text{Int}\,\mathcal{C}(O,R)$.



I. $M \in \text{Ext}\,\mathcal{C}(O,R)$.

A bizonyítandó azonosságban szereplő szakaszok az MAD és MCB háromszögek oldalai.

Az M szög a két háromszög közös szöge, valamint $MDA\sphericalangle = MBC\sphericalangle = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, mert ugyanahhoz a körívhez tartozó kerületi szögek. A Sz.Sz. hasonlósági eset alapján következik, hogy $MAD\Delta \sim MCB\Delta$, tehát $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{CB}$. Az első két arány egyenlőségéből következik, hogy $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.



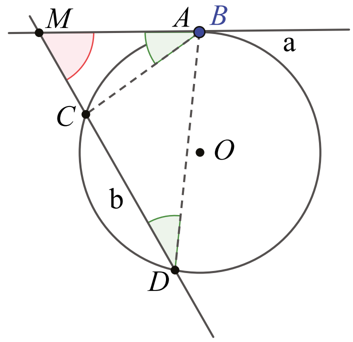
II. $M \in \text{Int}\,\mathcal{C}(O,R)$.

Az MAC és MBD háromszögekben $AMC\sphericalangle \equiv BMD\sphericalangle$ (csúcsszögek), valamint $MCA\sphericalangle = MBD\sphericalangle = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$, mert ugyanahhoz a körívhez tartozó kerületi szögek.

A Sz.Sz. hasonlósági eset alapján következik, hogy $MAC\Delta \sim MDB\Delta$, tehát $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} = \frac{AC}{DB}$. Az első két arány egyenlőségéből következik, hogy $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Megjegyzés: A fenti alkalmazásban az a és b egyenesek a $\mathcal{C}(O,R)$ kört két-két pontban metszik. Vizsgáljuk meg, hogy az összefüggés érvényes-e abban az esetben is, ha az egyik vagy mindkét egyenes érinti a kört.

Ha az M ponton áthaladó a egyenes érinti a kört, akkor A és B pontok egybeesnek. Ekkor a bizonyítandó egyenlőség $MB^2 = MC \cdot MD$ alakban írható. A BCM és DBM háromszögek szögeit vizsgálva észrevesszük, hogy az $M\sphericalangle$ a két háromszög közös szöge, valamint $MBC\sphericalangle = MDB\sphericalangle = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$. A Sz.Sz. hasonlósági eset alapján következik, hogy $MBC\Delta \sim MDB\Delta$, tehát $\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MB} = \frac{BC}{DB}$. Az első két arány egyenlőségéből következik, hogy $MB^2 = MC \cdot MD$.



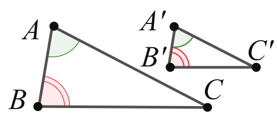
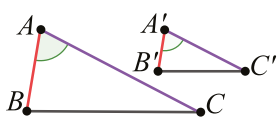
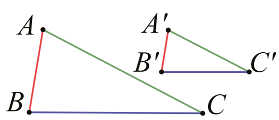
Ha mindkét egyenes érinti a kört, akkor $A = B$ és $C = D$, így az $MA^2 = MC^2$ azonosság egyértelmű, mivel külső pontból a körhöz húzott két érintő kongruens.

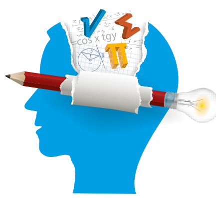
Jegyezd meg!

- Az értelmezés alapján az ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlók, ha egyidőben teljesülnek a következő összefüggések: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ és $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

- **A hasonlósági esetek elégséges feltételt** biztosítanak két háromszög hasonlóságának igazolásához.

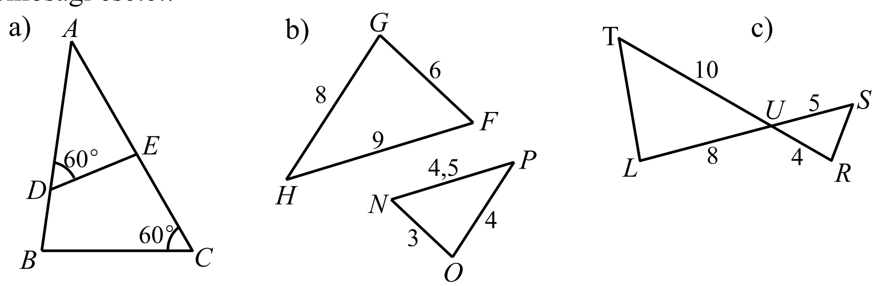
A hasonlósági esetek használata hatékonyabb módszere a hasonló háromszögek bizonyításának, mint az értelmezés.
Az értelmezésben megjelenő hat összefüggésből elégséges csak kettőt bebizonyítani, ezekből következik az összes többi.

Megnevezés	Feltevés	Ábra	Következtetés
A Sz.Sz. eset (két-két szög kongruenciája)	$A\sphericalangle \equiv A'\sphericalangle$ $B\sphericalangle \equiv B'\sphericalangle$		$ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$ $C\sphericalangle \equiv C'\sphericalangle$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$
Az O.Sz.O. eset (egy-egy szög kongruenciája és egy-egy arány egyenlősége)	$A\sphericalangle \equiv A'\sphericalangle$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k$		$ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$ $B\sphericalangle \equiv B'\sphericalangle$, $C\sphericalangle \equiv C'\sphericalangle$ $\frac{BC}{B'C'} = k$
Az O.O.O. eset (három arány egyenlősége)	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$		$ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$ $A\sphericalangle \equiv A'\sphericalangle$ $B\sphericalangle \equiv B'\sphericalangle$ $C\sphericalangle \equiv C'\sphericalangle$

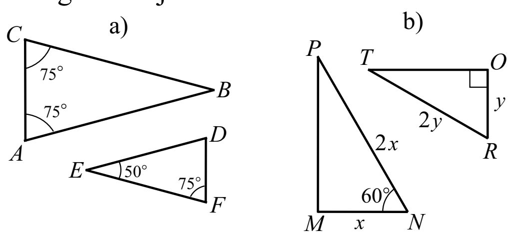


Gyakorlatok, feladatok

1. Azonosítsátok a mellékelt ábrán lévő hasonló háromszögeket, minden háromszögpár esetén megnevezve a hasonlósági esetet!



2. Bizonyítsátok be, hogy a mellékelt ábrán lévő háromszögek hasonlók. Mindkét esetben írjátok fel az oldalak arányosságát és a szögek kongruenciáját.



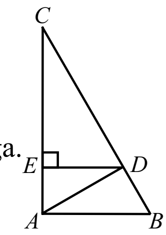
3. Rajzoljatok egy ABC egyenlő szárú háromszöget, amelyben $BAC\sphericalangle = 120°$ és D a BC oldal egy pontja úgy, hogy $ADC\sphericalangle = 60°$.
a) Igazoljátok, hogy az ábrán van két hasonló háromszög.
b) Igazoljátok, hogy $AB^2 = BC \cdot BD$.

4. Ha BD és CE szakaszok az ABC háromszög magasságai, akkor igazoljátok, hogy $ABD\Delta \sim ACE\Delta$.

5. Az ABC és DEF háromszögek hasonlók, valamint az M és N pont a BC illetve EF oldal egy-egy pontja. Igazoljátok, hogy:
a) ha AM és DN oldalfelezők, akkor $ABM\Delta \sim DEN\Delta$.
b) ha AM és DN szögfelezők, akkor $ACM\Delta \sim DFN\Delta$.
c) ha AM és DN magasságok, akkor $\dfrac{AM}{DN} = \dfrac{BC}{EF}$.

6. A DEF egyenlő oldalú háromszög kerülete 30 cm. Legyen DA oldalfelező, EB magasság, valamint FC a $DFE\sphericalangle$ szögfelezője, ahol $C \in DE$.
a) Igazoljátok, hogy $DEF\Delta \sim ABC\Delta$.
b) Számítsátok ki az $ABDE$ négyszög kerületét.

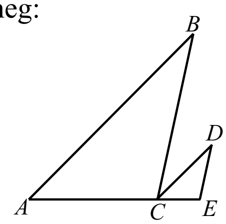
7. Legyen AD az ABC háromzög magassága, $A\sphericalangle = 90°$, valamint DE az ADC háromszög magassága.



a) Igazoljátok, hogy $ABC\Delta \sim DAC\Delta$.
b) Igazoljátok, hogy $ABD\Delta \sim CDE\Delta$.
c) Ha $AC = 16$ cm, $CD = 12{,}8$ cm számítsátok ki a BC és EC szakaszok hosszát.

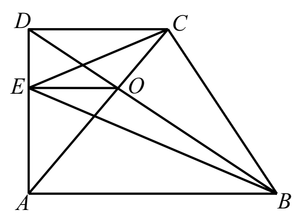
8. Az $ABCD$ téglalapban $E \in AB$, valamint $BCE\sphericalangle \equiv BDC\sphericalangle$.
a) Igazoljátok, hogy $BC^2 = BE \cdot CD$.
b) Számítsátok ki az AE szakasz hosszát tudva, hogy $AB = 8$ cm és $BC = 6$ cm.

9. A mellékelt ábrán $AB \parallel CD$, $BC \parallel$ DE és $AE = 4 \cdot CE$. Határozzátok meg:
a) Az ABC és CDE háromszögek kerületének arányát;
b) A CDE és ABC háromszögek területének arányát.



10. Az $ABCD$ paralelogrammában $AE \perp CD$, $E \in CD$ és $AE \cap BC = \{F\}$. Állapítsátok meg, hogy az ADE és FCE háromszögek hasonlók vagy nem, mindkét esetet megvizsgálva: $BAD\sphericalangle$ hegyesszög vagy tompaszög.

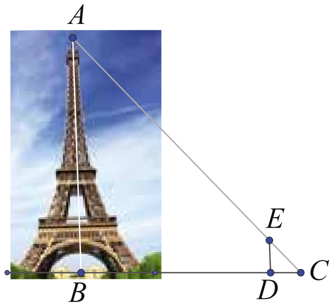
11. Az $ABCD$ derékszögű trapézban, $A\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$. Az átlók metszéspontján keresztül a trapéz alapjaihoz húzott párhuzamos az AD oldalt E pontban metszi.
a) Igazoljátok, hogy $ABE\Delta \sim DCE\Delta$.
b) Igazoljátok, hogy EO a $BEC\sphericalangle$ szög szögfelezője.



3.ℓ. Hasonló háromszögek gyakorlati alkalmazása

A mértani eszközökkel történő mérések során csak megközelítő értékekhez jutunk. Sok esetben a mérést lehetetlen elvégezni a túl nagy távolság miatt vagy akár olyan akadályok miatt, amelyek lehetetlenné teszik a hozzáférést. Ilyen jellegű mérésekhez Thalész mértani tulajdonságokat alkalmazott. Egy híres feladat a piramis magasságának meghatározása az árnyék segítségével. Thalész a hasonló háromszögek tulajdonságát használva meghatározta a hajó távolságát a parttól, de két hajó közti távolságot is.
Megjegyezzük, hogy az így kapott eredmények csak megközelítő értékek. Az eltérés nem a számításból adódik, hanem a távolságok és szögek méréséhez szükséges irány megállapításának pontatlanságából. Az idők során olyan korszerű eszközöket hoztak létre, amelyek segítségével a kapott értékek nagymértékben megközelítik a valós értékeket. Ezen mérési módszerek érdekesek és nagyon hasznosak lehetnek bizonyos helyzetekben.

Alkalmazás



A. Távolságok becslése a hasonlóság segítségével

1) *Tárgyak magasságának becslése*

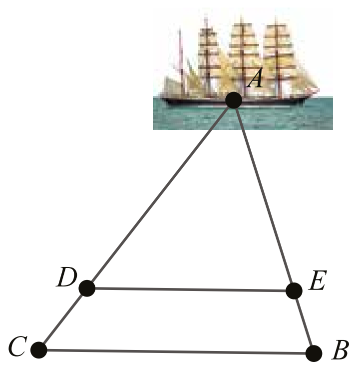
Hasonlóság használatával meghatározzuk a párizsi Eiffel-torony magasságát. Kijelöljük azt a külső pontot, ahonnan a mérést szeretnénk végezni (C). Megmérjük a C pont távolságát az alap középpontjától, legyen $BC = a$. Úgy helyezkedünk el a BC szakaszon, hogy a DE szakasz hossza megegyezzen a magasságunkkal.
A $DE = b$ magasság ismert és megmérjük DC távolságot, $DC = c$.
Mostmár elégséges információnk van a torony magasságának meghatározásához.
Az AB és DE egyenesek párhuzamosak (mindkettő függőleges irányú), így az ABC és EDC háromszögek hasonlók, ezért $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$, de a BC, ED és CD hossza ismert.

Az $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$, aránypárból kapjuk, hogy: $AB = \frac{BC \cdot ED}{DC}$ vagy $AB = \frac{a \cdot b}{c}$.

Feladat a portfólióba

Egy közeli baráttal Párizsba utaztok, hogy megmérjétek az Eiffel-torony magasságát. A 180 cm magas barát a DE-vel jelölt helyre helyezkedik el. Mérések után azt kaptátok, hogy $BC = 540$ m és $DC = 3$ m. Számítsátok ki a torony magasságát, a fentiekben bemutatott lépések alapján. (Válasz: $H_{torony} = 324$ m)

2) *Egy rögzített pontig való távolság becslése*

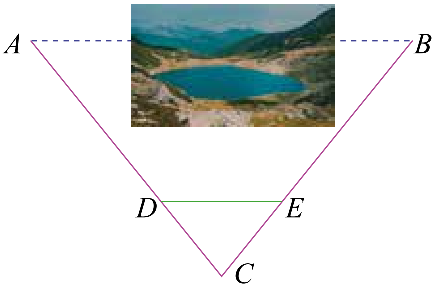


A parton állunk a B pontban és szeretnénk meghatározni ettől a ponttól a távolságot a part menti hajóig. A hajó helyzetét jelölje A. Hogyan járhatunk el?
Lássunk egy lehetséges változatot. (mellékelt ábra)
A B pontból a C pontba megyünk, megmérve a BC távolságot. A homokban megjelöljük BA és CA irányokat. A BA egyenesen kijelölünk egy E pontot, ezen keresztül párhuzamost húzunk a BC egyenessel, amely az AC egyenest a D pontban metszi. Megmérjük a BE és ED hosszúságokat.
Az ABC háromszögben $DE \parallel BC$, a hasonlóság alaptétele alapján következik, hogy: $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$. Az $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$ aránypárból származtatással kapjuk, hogy $\frac{AB - AE}{AB} = \frac{BC - DE}{BC}$ innen pedig az következik, hogy a hajóig lévő távolság:
$d = AB = \frac{EB \cdot BC}{BC - DE}$.

Feladat a portfólióba

A 2. alkalmazás lépéseit követve határozzátok meg az AB hosszát, ha $BC = 60$ m, $DE = 58$ m és $BE = 10$ m. (E: $AB = 290$ m)

3) *Két pont közötti távolság becslése*



Az A pontban állva szeretnénk meghatározni a távolságot B pontig. A közvetlen mérés lehetetlen a közbeeső akadály miatt. Keressünk egy módszert az AB szakasz hosszának meghatározásához. (mellékelt ábra) Kijelölünk egy C pontot úgy, hogy tudjuk megmérni az AC és BC távolságokat. Megjelöljük a CA és CB irányt. A CA illetve CB szakaszon szeretnénk rögzíteni a D és E pontot úgy, hogy a D és E pont között ne legyen akadály. A következőképpen járunk el:
1) A CA szakaszon kijelöljük a D pontot. 2) Megmérjük a CD, AC és BC szakasz hosszát. 3) A CB szakaszon kijelöljük az E pontot úgy, hogy $\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}$.
4) Megmérjük a DE szakasz hosszát.
5) Alkalmazzuk Thalész tételének fordított tételét, ez alapján következik, hogy $DE \parallel AB$.
Az ABC háromszögben a hasonlóság alaptétele alapján kapjuk, hogy: $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$.
Innen következik, hogy $AB = \frac{CA}{CD} \cdot DE$ tehát az AB távolságot meghatároztuk.

Példa. Az $AC = 15$ m és $BC = 45$ m, sajátos esetben megválaszthatjuk a D pontot úgy, hogy $CD = 1$ m. A CB szakaszon kijelöljük az E pontot úgy, hogy $\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}$, tehát $\frac{CE}{45} = \frac{1}{15}$. Következik, hogy $CE = 3$ m, azzal a feltétellel, hogy a DE szakaszt úgy választottuk meg, hogy a D és E pont között nincs akadály. Ellenkező esetben a D pontot a kedvező módon újraválasztjuk. Mérés útján kapjuk, hogy $DE = 5$ m. Ekkor $\frac{5}{AB} = \frac{1}{15} = \frac{3}{45}$, vagyis $AB = 75$ m.

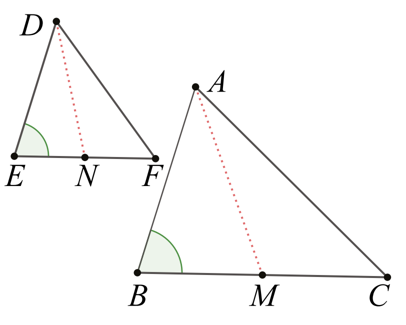
B. Két hasonló háromszög területének aránya

Tudjuk, hogy a háromszög területének kiszámításához szükség van a magasság hosszára. Hasznos lesz a következő tétel:

1. tétel.
Ha két hasonló háromszög esetén a hasonlósági arány k, akkor:
 a) a megfelelő oldalfelezők aránya k;
 b) a megfelelő magasságok aránya k;
 c) a megfelelő szögfelezők aránya k.

Bizonyítás: A DEF és az ABC hasonló háromszögek, a hasonlósági arány k.

Ekkor $D\sphericalangle \equiv A\sphericalangle$, $E\sphericalangle \equiv B\sphericalangle$, $F\sphericalangle \equiv C\sphericalangle$ és $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$.

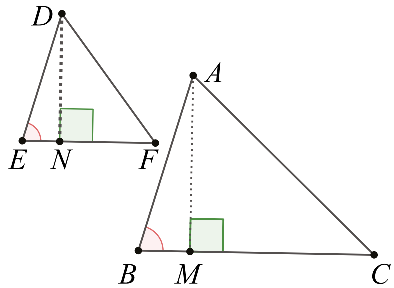


a) Igazoljuk, hogy a D és A csúcsból húzott két oldalfelező aránya k.
Jelölje M és N a BC, illetve EF oldalak felezőpontját.

Ekkor $\frac{EN}{BM} = \frac{\frac{EF}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{EF}{BC} = k$ és $\frac{DE}{AB} = \frac{EN}{BM}$.

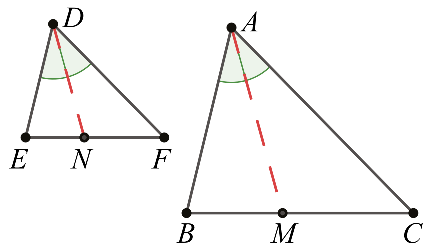
A feltevésből adódik, hogy $E\sphericalangle \equiv B\sphericalangle$ így az O.Sz.O. hasonlósági eset alaján

$DEN\Delta \sim ABM\Delta$, tehát $\frac{DN}{AM}=\frac{DE}{AB}=k.$ Bebizonyítottuk, hogy két hasonló háromszöben a megfelelő oldalfelezők aránya egyenlő a hasonlósági aránnyal.



b) Igazoljuk, hogy a D és A csúcsból húzott két magasság aránya k. A DEF és ABC háromszög magassága DN és AM. Ekkor a két háromszögben a $DNE\sphericalangle$ és $AMB\sphericalangle$ derékszögek kongruensek. Mivel $E\sphericalangle \equiv B\sphericalangle$ így a Sz.Sz. eset alapján $DEN\Delta \sim ABM\Delta$, tehát $\frac{DN}{AM}=\frac{DE}{AB}=k.$ Bebizonyítottuk, hogy két hasonló háromszögben a megfelelő magasságok aránya egyenlő a hasonlósági aránnyal.

c) Megjegyezzük, hogy a szögfelező hosszán a háromszög egyik csúcsa valamint a szemközti oldal és a szögfelező metszéspontja által meghatározott szakasz hosszát értjük. Legyen DN az $EDF\sphericalangle$, $N \in EF$ és AM szög szögfelezője $BAC\sphericalangle$, $M \in BC$.



Igazoljuk, hogy a DN és AM szakaszok aránya k.

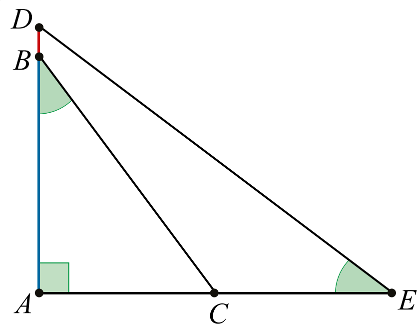
Mivel $BAM\sphericalangle = \frac{BAC\sphericalangle}{2}=\frac{EDF\sphericalangle}{2}=EDN\sphericalangle$, $B\sphericalangle = E\sphericalangle$, ezért a Sz.Sz. hasonlósági eset alapján $DEN\Delta \sim ABM\Delta$, tehát $\frac{DN}{AM}=\frac{DE}{AB}=k.$

2. tétel.
Ha két hasonló háromszög esetén a hasonlósági arány k, akkor a két háromszög területének aránya k^2.

Bizonyítás. A fenti ábra alapján a DEF és az ABC háromszögek hasonlók, a hasonlósági arány k, azaz $\frac{EF}{BC}=k.$ Igazoltuk, hogy a megfelelő magasságok aránya is k, tehát $\frac{DN}{AM}=k.$ Kiszámítjuk a két háromszög területének arányát: $\frac{\mathcal{T}_{DEF\Delta}}{\mathcal{T}_{ABC\Delta}}=\frac{\frac{EF\cdot DN}{2}}{\frac{BC\cdot AM}{2}}=\frac{EF}{BC}\cdot\frac{DN}{AM}=k\cdot k=k^2.$

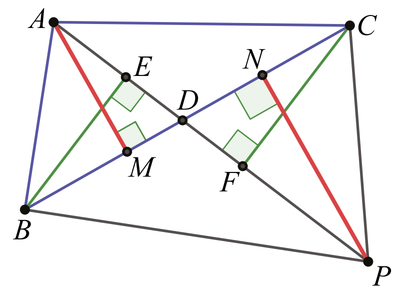
A bizonyított tételt kijelentjük a következőképpen:
Két hasonló háromszög területének aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével.

1. alkalmazás. Az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle = 90°$, $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm. Meghosszabítjuk az AB szakaszt a $BD = 1$ cm-es szakasszal, majd az AC félegyenesen felvesszük az E pontot úgy, hogy $ADE\sphericalangle \equiv ACB\sphericalangle$.
a) Igazoljátok, hogy az ABC és AED háromszögek hasonlók.
b) Számítsátok ki az ADE háromszög területét.



Megoldás. a) Az O.O. hasonlósági eset alapján az ABC és AED háromszögek hasonlók, hiszen $BAC\sphericalangle \equiv EAD\sphericalangle$ (közös szög) és a feltevésből $ACB\sphericalangle \equiv ADE\sphericalangle$.

b) Az ABC és AED háromszögek hasonlóságából kapjuk, hogy a hasonlósági arány
$k=\frac{AC}{AD}=\frac{AC}{AB+BD}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$ Mivel $\frac{\mathcal{T}_{ABC\Delta}}{\mathcal{T}_{AED\Delta}}=k^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$
és $\mathcal{T}_{ABC\Delta}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{8\cdot 6}{2}=24$ (cm²), ezért $\mathcal{T}_{AED\Delta}=\mathcal{T}_{ABC\Delta}:\frac{4}{9}=24\cdot\frac{9}{4}=54$ (cm²).



2. alkalmazás. Az ABC háromszögben a P pont a $BAC\sphericalangle$ szög egy belső pontja. Az AP egyenes a BC oldalt D pontban metszi. Igazoljátok, hogy:

a) $\dfrac{\mathcal{T}_{ABP\Delta}}{\mathcal{T}_{ACP\Delta}} = \dfrac{DB}{DC}$; b) $\dfrac{\mathcal{T}_{ABC\Delta}}{\mathcal{T}_{PBC\Delta}} = \dfrac{DA}{DP}$.

Megoldás.

a) A BE és CF az ABP és ACP háromszög magassága. A BDE és CDF háromszögek hasonlók, mert

$BED\sphericalangle \equiv CFD\sphericalangle$ (90°) és $BDE\sphericalangle \equiv CDF\sphericalangle$ (csúcsszögek). Ekkor $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BE}{CF}$.

Azt kapjuk, hogy $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BE \cdot AP}{CF \cdot AP} = \dfrac{2 \cdot \mathcal{T}_{ABP}}{2 \cdot \mathcal{T}_{ACP}} = \dfrac{\mathcal{T}_{ABP}}{\mathcal{T}_{ACP}}$.

b) Az AM és PN szakasz az ABC és PBC háromszög magassága. Az ADM és PDN háromszögek hasonlók, mert

$AMD\sphericalangle \equiv PND\sphericalangle$ (90°) és $ADM\sphericalangle \equiv PDN\sphericalangle$ (csúcsszögek). Ekkor $\dfrac{DA}{DP} = \dfrac{AM}{PN}$.

Azt kapjuk, hogy $\dfrac{DA}{DP} = \dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AM \cdot BC}{PN \cdot BC} = \dfrac{2 \cdot \mathcal{T}_{ABC}}{2 \cdot \mathcal{T}_{PBC}} = \dfrac{\mathcal{T}_{ABC}}{\mathcal{T}_{PBC}}$.

3. alkalmazás. Az ABC háromszög AB, BC, illetve AC oldalán felvesszük a D, E és F pontot úgy, hogy $DE \parallel AC$ és $DF \parallel BC$. Tudjuk, hogy az ADF háromszög területe 4 cm² és a BDE háromszög területe 9 cm². Számítsátok ki az ABC háromszög területét!

Megoldás:

Az ADF és ABC háromszögek hasonlók, tehát $\dfrac{\mathcal{T}_{ADF}}{\mathcal{T}_{ABC}} = \dfrac{AD^2}{AB^2}$ (1).

A BDE és BAC háromszögek hasonlók, tehát $\dfrac{\mathcal{T}_{BDE}}{\mathcal{T}_{ABC}} = \dfrac{BD^2}{AB^2}$ vagy $\dfrac{\mathcal{T}_{ABC}}{\mathcal{T}_{BDE}} = \dfrac{AB^2}{BD^2}$ (2).

Összeszorozva az (1)-es és a (2)-es azonosságot kapjuk, hogy $\dfrac{\mathcal{T}_{ADF}}{\mathcal{T}_{ABC}} \cdot \dfrac{\mathcal{T}_{ABC}}{\mathcal{T}_{BDE}} = \dfrac{AD^2}{AB^2} \cdot \dfrac{AB^2}{BD^2}$, $\dfrac{\mathcal{T}_{ADF}}{\mathcal{T}_{BDE}} = \dfrac{AD^2}{DB^2}$

$\dfrac{4}{9} = \dfrac{AD^2}{DB^2}$, tehát $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{2}{3}$. Származtatással kapjuk, hogy $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{2}{5}$.

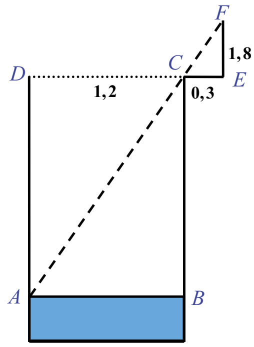
Az (1) azonosságból következik, hogy $\dfrac{\mathcal{T}_{ADF}}{\mathcal{T}_{ABC}} = \left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2$, $\dfrac{4}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{4}{25}$, ahonnan $\mathcal{T}_{ABC} = 25$ cm².

Jegyezd meg!

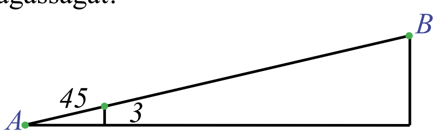
- Ha két háromszög hasonló, akkor a megfelelő oldalfelezők, magasságok és a megfelelő szögfelezők aránya egyenlő a hasonlósági aránnyal.
- Két hasonló háromszög területének aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével.

Gyakorlatok, feladatok

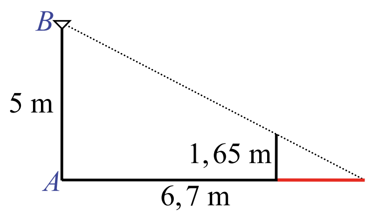
1. Gergő a vakacióban a nagyszüleihez megy. Megállapítja, hogy a kerti kút javításra szorul, ezért tudni szeretné a kút mélységét a víz felszínéig ($h = AD$). Mivel nincs ilyen hosszú mérőszalagja a következőképpen jár el: Gergő magassága 1,8 m és ha 0,3 m távolságra áll a kúttól, akkor pontosan meglátja a víz felszínének érintkezését a kút falával. Tudva, hogy a kút átmérője 1,2 m Gergő állítja, hogy meg tudja határozni (megközelítve) a kút mélységét a víz felszínéig. Figyeljétek meg a mellékelt ábrát és határozzátok meg a kút mélységét a víz felszínéig.



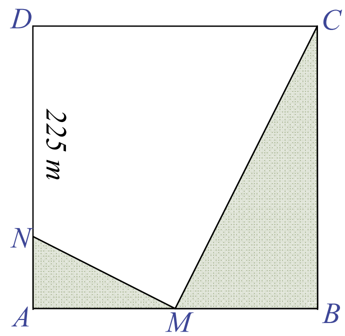
2. Egy egyenes útvonalon közlekedő drótkötélpálya ércet szállít AB távolságon, mely 375 m. Az A pontból 45 m megtétele után 3 m magasságba ér. Számítsátok ki a B végpont magasságát!



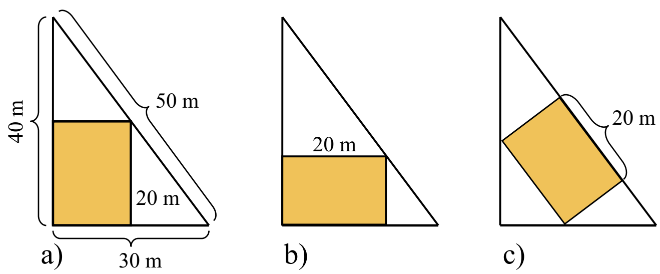
3. Dani játszóterét egy égő világítja meg, amely 5 m magasan van felszerelve egy oszlopra. Dani magassága 1,65 m és 6,7 méterre áll az oszloptól. Számítsátok ki Dani árnyékának hosszát.

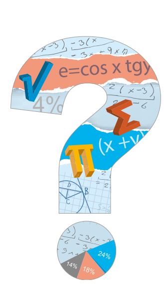


4. Egy bevásárlóközpont az $ABCD$ négyzet alakú telekre van építve. Ennek vázlata a mellékelt ábrán látható. Az AMN és BCM háromszögek üzletek számára kijelölt helységek, ahol az M pont az AB szakasz felezőpontja és $MN \perp MC$. Tudjuk, hogy $DN = 225$ m. Számítsátok ki az üzletek számára kijelölt felület nagyságát.



5. Bence egy kosárlabdapályát szeretne megtervezni az udvaron, amelynek hossza 20 m. A kert alakja derékszögű háromszög és méretei 30 m, 40 m, 50 m. A kivitelező három változatot mutat be, amint az alábbi ábra mutatja. Határozzátok meg, hogy melyik változatot válassza Bence ha tudjuk, hogy a lehető legnagyobb felületű pályát szeretné



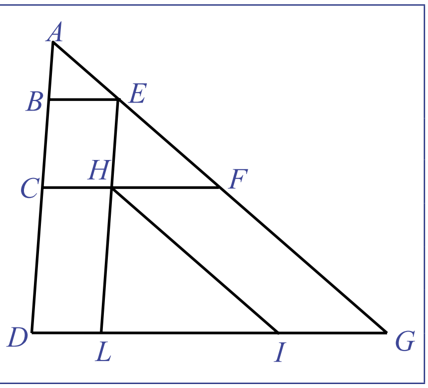


Ismeretfelmérő

Hivatalból 10 pont jár

I. *Párosítsátok az első oszlopban lévő számokkal jelölt kifejezéseket a második oszlopban lévő válaszokkal, úgy, hogy helyes legyen!*

1. A mellékelt ábrán $BE \parallel CF \parallel DG$, $EL \parallel AD$, $EL \cap CF = \{H\}$, $HI \parallel FG$ és $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 20$ cm, $AG = 30$ cm, $DG = 24$ cm. Ekkor:



	A	B
5p	**1.** $CF =$	a. 3,6 cm
5p	**2.** $FG =$	b. 12 cm
5p	**3.** $DL =$	c. 4,8 cm
5p	**4.** $\mathcal{K}_{HIL} =$	d. 37 cm
		e. 15 cm
		f. 18 cm

II. *Írd ki az egyes feladatokhoz tartozó egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p **1.** Az $ABCD$ négyzetben $AB = 6$ cm, E a CD oldal felezőpontja, $BE \cap AC = \{F\}$ és $FM \parallel CD$, $M \in BC$. Az FM szakasz hossza:
A. 2 cm B. 3 cm C. 4 cm D. 6 cm

10p **2.** A DEF egyenlő oldalú háromszög súlypontján keresztül az EF oldallal húzott párhuzamos a DE és DF oldalt a T, illetve S pontban metszi. Ha $EF = 15$ cm, akkor a DTS háromszög kerülete:
A. 15 cm B. 20cm C. 25 cm D. 30 cm

5p **3.** Az $ABCD$ téglalap CD oldalán felvesszük az E és F pontot úgy, hogy $DE = CF = 2$ cm. Ha $AB = 12$ cm és $AF \cap BE = \{P\}$. akkor:
A. $AP = 1,(3) \cdot PF$ B. $AP = 1,5 \cdot PF$ C. $AP = 2 \cdot PF$ D. $AP = PF$

5p **4.** Az ABC háromszögben, $ABC\sphericalangle = 90^\circ$, $AB = 30$ cm, $BC = 40$ cm, $AC = 50$ cm és $D \in BC$, $CD = 0,75 \cdot BC$. A D pont távolsága az AC egyenestől:
A. 15 cm B. 16 cm C. 18 cm D. 20 cm

III. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

1. Az MAB háromszögben az MAB és MBA szögek szögfelezői az I pontban metszik egymást, valamint az I ponton keresztül az AB egyeneshez húzott párhuzamos az MA és MB oldalt a C illetve D pontban metszi. Tudjuk, hogy $MC = 12$ cm, $MA = 18$ cm, $MD = 8$ cm.

5p a) Számítsátok ki a BD szakasz hosszát.
10p b) Igazoljátok, hogy $CI = 6$ cm.
10p c) Határozzátok meg az AB szakasz hosszát.

2. Az $ABCD$ rombuszban $AC \cap BD = \{O\}$. A BC oldal felezőpontja a P, illetve a CD oldalé a Q pont. Az AP egyenes a BD egyenest az E pontban, míg a BQ egyenes az AC egyenest az F pontban metszi.

10p a) Igazoljátok, hogy az ADE és PBE háromszögek hasonlók.
10p b) Számítsátok ki az $\dfrac{EO}{BD}$ arány értékét.
5p c) Igazoljátok, hogy az EF és BC egyenesek párhuzamosak.

7 Metrikus összefüggések a derékszögű háromszögben

7.1. Merőleges vetületek egy egyenesre. Magasságtétel. Befogótétel
7.2. Pitagorasz-tétel. A Pitagorasz-tétel fordított tétele
7.3. Trigonometriai alapismeretek a derékszögű háromszögben: hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense, kotangense
7.4. A derékszögű háromszög megoldása. Alkalmazások

Sajátos kompetenciák:

1.7. 2.7. 3.7. 4.7. 5.7. 6.7.

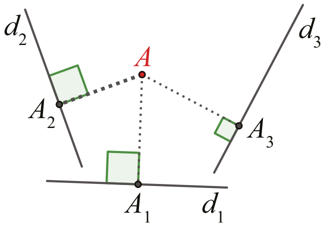
7.1. Merőleges vetületek egy egyenesre. A magasságtétel. A befogótétel

1.ℓ. Merőleges vetületek egy egyenesre

1. Értelmezés. **Az A pontnak a d egyenesre eső merőleges vetülete** az A pontból a d egyenesre állított merőleges talppontja. (Rövidebben: **az A pont vetülete a d egyenesre**).

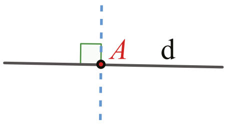
Jelölés: ha M az A vetülete a d egyenesre, így írjuk: $pr_d A = M$.

Példák.



a) Az A pontnak a d_1 egyenesre eső vetülete A_1, mert $AA_1 \perp d_1$ és $A_1 \in d_1$.
Az A pontnak a d_2 egyenesre eső vetülete A_2, mert $AA_2 \perp d_2$ és $A_2 \in d_2$.
Az A pontnak a d_3 egyenesre eső vetülete A_3, mert $AA_3 \perp d_3$ és $A_3 \in d_3$.
Jelölés: $A_1 = pr_{d_1}A$, $A_2 = pr_{d_2}A$, $A_3 = pr_{d_3}A$.

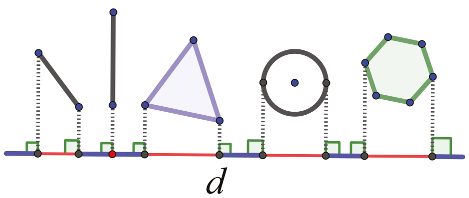
A fenti példákban az A pont nincs azon az egyenesen, amire vetítjük.



b) Ha az A pont a d egyenesen fekszik, akkor az A vetülete d-re maga az A, mivel az A-n átmenő, d-re merőleges egyenes talppontja maga az A.

Minden mértani alakzat egy ponthalmaz, tehát beszélhetünk egy ponthalmaz egyenesre eső merőleges vetületéről.

2. értelmezés: *Az F ponthalmaznak a* ***d*** *egyenesre eső vetületén az F halmaz összes pontjának a d-re eső vetületeinek halmazát értjük.*

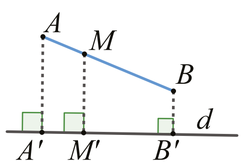


Példák. A mellékelt ábrán különböző síkidomok és azok d-re eső vetületei láthatók. Megfigyelhetjük, hogy a (pirossal jelzett) vetületek mindegyike szakasz vagy pont.

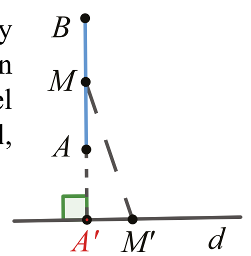
Tétel

1) Ha $AB \not\perp d$, akkor az AB szakasznak a d egyenesre eső vetülete az $A'B'$ szakasz, ahol $A' = pr_d A$ és $B' = pr_d B$.
2) Ha $AB \perp d$, akkor az AB szakasznak a d egyenesre eső vetülete az A' pont, ahol $A' = pr_d A$.

Bizonyítás. Tekintsük az AB szakaszt és a d egyenest. Két esetet tárgyalunk: $AB \not\perp d$ és $AB \perp d$.



1) Az AB szakasz tartóegyenese nem merőleges d egyenesre.
Jelöljük A'-tel és B'-tel az A illetve B pont d-re eső vetületét; nyilvánvalóan $A' \neq B'$.
Igazoljuk, hogy az AB szakasz vetülete az $A'B'$ szakasz.
Az AB szakasz egy tetszőleges M pontjának a d egyenesre eső vetületét jelöljük M'-tel.
Ebből az $AA' \parallel BB' \parallel MM'$ összefüggést kapjuk, mivel ugyanarra a d egyenesre merőlegesek. MM' és AA' párhuzamosak, ebből következik, hogy A és A' az MM' egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el. Hasonlóan, B és B' is az MM' egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el. Mivel A és B az MM' egyenes különböző oldalán található, következik, hogy A' és B' is az egyenes különböző oldalán van, tehát M' az $A'B'$ szakaszon található.



Hasonlóan bizonyítjuk, hogy az $A'B'$ szakasz bármely pontja az AB szakasz valamely pontjának vetülete. Vegyünk fel egy M' pontot az $A'B'$ szakaszon, állítsunk merőlegest M'-ben a d egyenesre és jelöljük M-mel ezen merőleges és az AB egyenes metszéspontját. Mivel $AA' \parallel MM' \parallel BB'$, a fentebb leírt módon következik, hogy M az A és B között helyezkedik el, tehát az AB szakaszon fekszik.

2) Az AB szakasz merőleges a d egyenesre, így az AB egyenes a d egyenessel derékszöget alkot, és az A' pontban metszik egymást.

Igazoljuk, hogy az AB szakasz vetülete a d egyenesre az A' pont, vagyis az AB szakasz minden pontjának a vetülete ugyanabba az A' pontba esik.

Feltételezzük az ellenkezőjét: létezik egy M pont az AB szakaszon, amelynek az M' vetülete különbözik az A' ponttól: $M' \neq A'$. Következik, hogy az $MA'M'$ háromszögnek két derékszöge van, ami ellentmondás. Az ellentmondást az okozta, hogy a feltételezés hamis, tehát az AB szakasz minden pontjának a d egyenesre eső vetülete az A' pont. Következik, hogy az AB szakasz vetülete a d egyenesre az A' pont.

1. alkalmazás

a) Egy szakasz vetületének hossza kisebb a szakasz hosszánál vagy egyenlő vele.

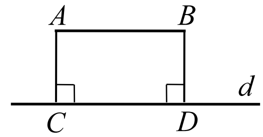
b) Egy szakasz felezőpontjának egy egyenesre eső vetülete a vetületi szakasz felezőpontja.

Bizonyítás. a) AB a szakasz, d az egyenes és $C = pr_d A$, $D = pr_d B$. Következik, hogy az AB szakasz d egyenesre eső vetülete a CD szakasz, ezt így jelöljük: $pr_d AB = CD$.

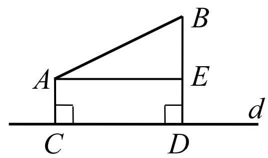
Összehasonlítjuk az AB és CD szakaszok hosszát.

Az $AB \perp d$ eset nyilvánvaló, mivel az AB szakasz vetülete egy ponttá zsugorodik, $C = D$.

További két esetet kell vizsgálni: a_1) $AB \parallel d$ és a_2) $AB \nparallel d$.

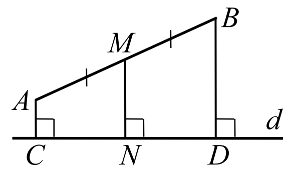


a_1) Ha $AB \parallel d$, akkor figyelembe véve, hogy $AC \perp d$ és $BD \perp d$ következik, hogy $AC \parallel BD$ és $ACD\sphericalangle = BDC\sphericalangle = 90°$. Mivel $AB \parallel CD$, következik, hogy $ABDC$ téglalap és $CD = AB$.



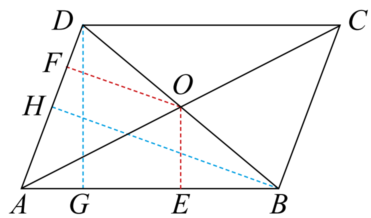
a_2) Ha az AB egyenes nem párhuzamos a d egyenessel, megszerkesztjük az $E \in BD$ pontot úgy, hogy $AE \perp BD$. Az $AEDC$ négyszög egy téglalap és $AE = CD$. Az ABE háromszögben $AEB\sphericalangle = 90°$, és mivel a befogó rövidebb, mint az átfogó, $AE < AB$ tehát $CD < AB$.

Az a_1) és a_2) esetekből következik, hogy $CD \leq AB$.



b) Az $AB \perp d$ esetet nem szükséges tárgyalni, mert ebben az esetben $C = D$. Marad az $AB \not\perp d$ eset. Az A, M és B pontból a d egyenesre állított merőlegesek egyenlő közű párhuzamosok (M az AB szakasz felezőpontja). Alkalmazva az egyenlő közű párhuzamosok tételét következik, hogy N a CD szakasz felezőpontja.

2. alkalmazás



Az $ABCD$ paralelogrammában A hegyesszög, a BD átló nem merőleges az AD oldalra és $AC \cap BD = \{O\}$. Megszerkesztjük a következő vetületeket:

E az O pont AB-re eső vetülete, F az O pont AD-re eső vetülete, G a D pont AB-re eső vetülete, H a B pont AD-re eső vetülete.

Igazoljuk, hogy $BE \cdot FH = DF \cdot GE$.

Megoldás. $G = pr_{AB}D$ és $B = pr_{AB}B$, tehát a BD szakasz vetülete az AB egyenesre a BG szakasz.

$E = pr_{AB}O$ és O a BD szakasz felezőpontja, tehát E is a BG szakasz felezőpontja: $BE = EG = a$. (1)

$H = pr_{AD}B$ és $D = pr_{AD}D$, tehát a BD szakasz vetülete az AD egyenesre a DH szakasz.

$F = pr_{AD}O$ és O a BD szakasz felezőpontja, tehát F is a DH szakasz felezőpontja: $DF = FH = b$. (2)

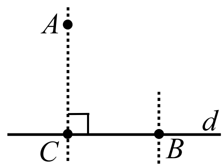
Az (1) és (2) összefüggésekből következik $BE \cdot FH = a \cdot b = DF \cdot GE$, amit igazolni kellett.

Feladat a portfólióba

Fogalmazzátok újra és oldjátok meg a 2. alkalmazást, ha A tompaszög.

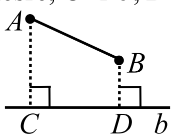
Gyakorlatok és feladatok

1. Adott az A, B és C pont és a d egyenes úgy, hogy $A \notin d$, $B \in d$, $C \in d$ és $AC \perp d$. Másoljátok le az alábbi mondatokat és egészítsétek ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjatok.



a) A C pont a(z) … pont merőleges vetülete a d egyenesre.
b) A B pont a(z) … pont merőleges vetülete a d egyenesre.

2. Az A és B pont a b egyenes azonos oldalán található, $AB \not\perp b$. Az AC és BD egyenes merőleges a b egyenesre, $C \in b$, $D \in b$.



Nevezzétek meg a következő vetületeket: $pr_b A$, $pr_b B$ és $pr_b AB$.
Megjegyzés. A 2-es, 3-as, 4-es és 9-es feladatokban $pr_d A$ az A pont d egyenesre eső vetületét jelöli.

3. Adott a d egyenes, valamint az E és G pont, $E \notin d$ és $G \in d$. Vegyétek fel az $F \in d$ pontot úgy, hogy teljesüljön az $EF \perp d$ feltétel. Nevezzétek meg a következő vetületeket: $pr_d E$, $pr_d G$ és $pr_d EG$.

4. Az A és B pont a d egyenes különböző oldalán helyezkedik el, $AB \cap d = \{C\}$.
Legyen $AD \perp d$, $D \in d$ és $BE \perp d$, $E \in d$.
a) Nevezzétek meg a: $pr_d A$, $pr_d B$, $pr_d C$, $pr_d AB$ vetületeket.
b) Ha C az AB szakasz felezőpontja, igazoljátok, hogy $pr_d C$ a DE szakasz felezőpontja.

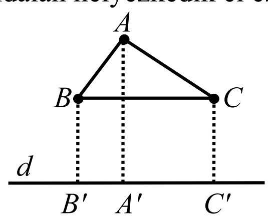
5. Ábrázoljátok az xOy derékszögű koordinátarendszerben az $A(-2;4)$, $B(0;3)$, $C(3;-2)$, $D(5;0)$ pontokat, majd ezen pontok Ox tengelyre eső A', B', C' illetve D' vetületeit. Határozzátok meg az A, B, C és D pontok koordinátáit.

6. Ábrázoljátok az xOy merőleges koordináta rendszerben az $A(-3;-4)$, $B(0;2)$, $C(1;5)$, $D(3;0)$, pontokat, majd ezen pontok Oy tengelyre eső A', B', C', illetve D' vetületeit. Határozzátok meg az A', B', C' és D' pontok koordinátáit.

7. A P pont az xOy szög belső tartományában található, az OP szakasz vetületei a szög száraira az OA illetve OB kongruens szakaszok. Igazoljátok, hogy az OP félegyenes az xOy szög szögfelezője.

8. A d egyenes különböző oldalán adott az M és N pont, $d \cap MN = \{O\}$, és $A = pr_d M$, $B = pr_d N$. Mutassátok ki, hogy:
a) Ha $OM = ON$, akkor $OA = OB$.
b) Ha $OA = OB$, akkor $OM = ON$.

9. A mellékelt ábrán az A, B és C pont a d egyenes azonos oldalán helyezkedik el és $BC \parallel d$.



Döntsétek el a következő kijelentések logikai értékét:
p_1: $pr_d AB = A'B'$;
p_2: $pr_d AC = A'C'$;
p_3: $pr_d BC = B'C'$.

10. Az ABC háromszög magassága AD.
a) Szerkesszetek ábrát, majd nevezzétek meg az AB és AC oldal vetületét a BC egyenesre a következő esetekben:
1) $B\sphericalangle < 90°$ és $C\sphericalangle < 90°$;
2) $B\sphericalangle > 90°$.
b) Határozzátok meg a „$BD + DC = BC$” kijelentés logikai értékét az a) alpont mindkét esetében.

11. Az A, B, C és D kollineáris pontok a d egyenes ugyanazon oldalán helyezkednek el úgy, hogy $AB = BC = CD$. Az A', B', C' és D' pontok az A, B, C, illetve D vetületei a d egyenesre. Igazoljátok a következő egyenlőségeket:
a) $A'B' = B'C' = C'D'$
b) $BB' = \dfrac{AA' + CC'}{2}$, $CC' = \dfrac{BB' + DD'}{2}$,
$BB' = \dfrac{2\,AA' + DD'}{3}$, $CC' = \dfrac{AA' + 2\,DD'}{3}$.

2.ℓ. A magasságtétel

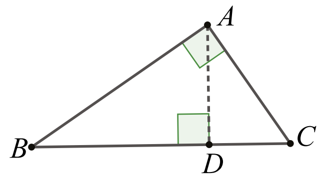
Akárcsak az egyenlő oldalú háromszögeknek, a derékszögű háromszögeknek is számos elméleti és gyakorlati alkalmazása ismeretes. A matematika történetének kezdete óta ismertek a derékszögű háromszöggel kapcsolatos felfedezések, amelyeket a társadalmi élet több területén alkalmaznak.

Egy kis történelem

A legkorábbról fennmaradt matematikai feljegyzések (Kr.e. 2000 – 1800), amelyeket babilóniai agyagtáblák (Plimpton 332 agyagtábla) és papirusztekercsek (Rhind-papirusz) őriztek meg, tartalmazzák a derékszögű háromszög oldalhosszaként értelmezhető számokat (pitagoraszi számok) és a derékszögű háromszög tulajdonságait

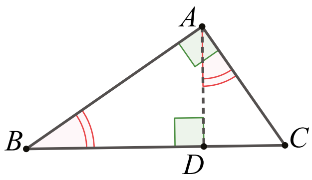
Emlékeztető

A mellékelt ábra szerint az A-ban derékszögű ABC háromszögben, a CA, BA és AD szakaszok a háromszög magasságai és az A pont a háromszög magasságpontja (ortocentruma).
1) Egy derékszögű háromszögben a befogók a háromszög magasságai.
2) A háromszög derékszögű csúcsa, a háromszög magasságpontja (ortocentruma).



Fedezzük fel, értsük meg!

A magasságtétel
Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók átfogóra eső vetületeinek mértani közepe.



Bizonyítás. Az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle = 90°$ és AD az átfogóhoz tartozó magasság. Bizonyítandó, hogy: $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$. Ezzel egyenértékű relációk $AD^2 = BD \cdot CD$ és $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$. A kapott aránypár azt sugallja, hogy keressünk hasonló háromszögeket és ezekben hasonlósági arányokat.
Az AD szakasz az ADB és ADC háromszögnek is oldala.
Mindkét háromszög derékszögű: $ADB\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 90°$, továbbá az ABD és CAD szögek kongruensek egymással (ugyanaz a BAD szög a pótszögük), tehát $ABD\Delta \sim CAD\Delta$. A hasonló háromszögek oldalaira vonatkozó aránysor: $\dfrac{AB}{CA} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{CD}$, és a $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{CD}$ aránypárból következik, hogy $AD^2 = BD \cdot CD$ amit igazolni kellett.

Alkalmazás

1. alkalmazás. a) Az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle = 90°$. Számítsuk ki az AD átfogóhoz tartozó magasságot, ha $DC = 2{,}25 \cdot BD$ és $AD + BC = 57$ cm.
b) Az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle = 90°$, AD az átfogóhoz tartozó magasság, $DC = k^2 \cdot BD$ és $AD + BC = a$, (a és k adott pozitív számok). Számítsuk ki az AD szakasz hosszát a és k függvényében.

Megoldás. a) $BD = x$ jelöléssel $DC = 2{,}25 \cdot BD = 2{,}25 \cdot x$, és $BC = BD + DC = x + 2{,}25 \cdot x = 3{,}25 \cdot x$.
Az ABC háromszögben alkalmazzuk a magasságtételt: $AD^2 = BD \cdot DC = 2{,}25 \cdot x^2 \Rightarrow AD = 1{,}5 \cdot x$.
A feltétel szerint $AD + BC = 57 \Rightarrow 1{,}5 \cdot x + 3{,}25 \cdot x = 57 \Rightarrow 4{,}75 \cdot x = 57 \Rightarrow x = 57 : 4{,}75 = 12$.
Végeredmény: $AD = 1{,}5 \cdot x = 18$ cm.

b) Kifejezzük a BC átfogót az AD magasság függvényében: $BC = BD + DC$. Ide behelyettesítve DC-t, kapjuk, hogy $BC = (k^2 + 1) \cdot BD$. (1)
Az ABC háromszögben alkalmazzuk a magasságtételt: $AD^2 = BD \cdot CD$, ebből következik, hogy
$AD^2 = k^2 \cdot BD^2$, $AD = k \cdot BD$, $BD = \dfrac{AD}{k}$, végül az (1)-es összefüggés alapján $BC = \left(k^2 + 1\right) \cdot \dfrac{AD}{k}$.

Az $AD + BC = a$ feltételből következik, hogy: $AD + (k^2 + 1) \cdot \dfrac{AD}{k} = a$, majd $AD \cdot \dfrac{k^2 + k + 1}{k} = a$, végül
$AD = \dfrac{a \cdot k}{k^2 + k + 1}$.

Mielőtt megfogalmaznánk a magasságtétel fordított tételét, újrafogalmazzuk a magasságtételt, kiemelve a feltevést és a következtetést.

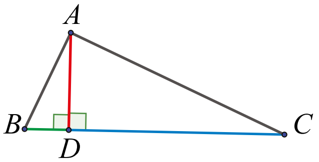
Újrafogalmazás: Adott az ABC háromszög és a BC oldalhoz tartozó AD magassága.

Ha az ABC háromszög A-ban derékszögű ($A\sphericalangle = 90°$), akkor $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$.
A fordított tételt ugyanabban a keretben fogalmazzuk meg, azaz az ABC háromszögről és annak az AD *magasságáról* beszélünk.

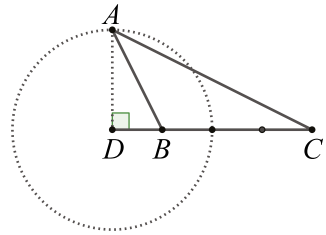
A direkt tétel feltevése	Következtetés
Az ABC háromszög derékszögű: $A\sphericalangle = 90°$	$AD = \sqrt{BD \cdot CD}$

Ahhoz, hogy eldöntsük, hogy a fordított tétel igaz-e, el kell döntsük, hogy az $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$, összefüggésből következik-e, hogy a háromszög derékszögű A-ban?
Meglepő, de ez a következtetés nem mindig igaz. Mégis, egy további feltétel hozzáadásával érvényes tételt kapunk.

A magasságtétel fordított tétele
Ha az ABC háromszög nem tompaszögű, és az AD magasság mértani közepe az AB és AC oldalak BC-re eső vetületeinek, akkor a háromszög derékszögű.



Bizonyítás. Az ABC háromszögben $AD \perp BC$, $D \in BC$. A kirótt feltétel azt eredményezi, hogy D a BC szakasz belső pontja.
A feltétel szerint $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$, ezzel ekvivalens $AD^2 = BD \cdot CD$ vagyis
$\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$. Az így kapott aránypár és az a tény, hogy az ADB és CDA háromszögek derékszögűek ADB-ben illetve CDA-ban, azt eredményezi, hogy ezek a háromszögek hasonlóak (O.Sz.O. *eset*).
Következik, hogy $ABD\sphericalangle \equiv CAD\sphericalangle$ és $BAD\sphericalangle \equiv ACD\sphericalangle$. Az ABD derékszögű háromszögben az ABD és BAD szögek pótszögek, és figyelembe véve, hogy $ABD\sphericalangle \equiv CAD\sphericalangle$, következik, hogy a $CAD\sphericalangle$ és $BAD\sphericalangle$ szögek is pótszögek, tehát $BAC\sphericalangle$ derékszög.



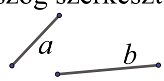
Megjegyzés. Egy ellenpéldával indokoljuk azt a kitételt, hogy az ABC háromszög nem lehet tompaszögű.
A CD szakaszt négy egyenlő részre osztjuk és jelöljük B-vel a D-hez legközelebb fekvő osztópontot: $CD = 4BD$. A D pontban merőlegest állítunk a BC egyenesre, ezen felvesszük az A pontot úgy, hogy $AD = 2BD$.

Azt kapjuk, hogy $\sqrt{BD \cdot DC} = \sqrt{BD \cdot 4 \cdot BD} = 2 \cdot BD = AD$
BC és CD az AB illetve AC oldalak BC egyenesre eső vetületei.
Következtetés. Létezik olyan ABC háromszög, amelyben az AD magasság az AB és AC oldalak BC-re eső vetületeinek mértani közepe, de a háromszög nem derékszögű.

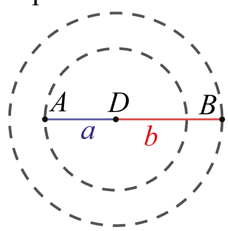
Tudtátok-e, hogy... ?
1) Az ellenpélda egy olyan példa, amely megcáfol egy matematikai kijelentést.
2) Egy matematikai állítást bizonyítással szükséges igazolni.
3) Egy matematikai állítást egyetlen ellenpéldával meg lehet cáfolni.

2. alkalmazás. Adott két, a és b hosszúságú szakasz. Szerkesszük meg vonalzó és körző segítségével az $\frac{a+b}{2}$ és $\sqrt{a \cdot b}$, hosszúságú szakaszokat, ezáltal igazoljuk a középarányosok egyenlőtlenségét: $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$, bármely a és b pozitív szám esetén.
Megoldás. Kimutattuk, hogy a befogók átfogóra eső vetületének mértani közepe éppen az átfogóhoz tartozó magasság hossza. Meg kell tehát szerkesztenünk egy derékszögű háromszöget, melyben a befogók átfogóra eső vetületei kongruensek az adott szakaszokkal.
Emlékeztető: egy félkörbe írt kerületi szög derékszög. A keresett háromszög szerkesztésének lépései:

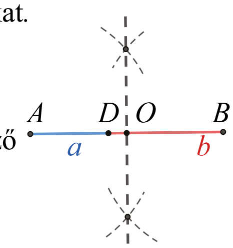
Az adatok meghatározása: adottak az a és b hosszúságú szakaszok.



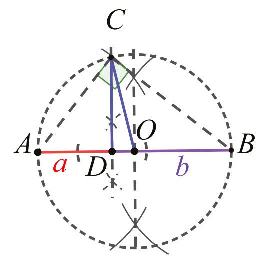
1. lépés. Meghúzzuk a d egyenest, rögzítünk rajta egy D pontot, és körző segítségével megszerkesztjük a két oldalán az a illetve b hosszúságú szakaszokat.



2. lépés. Azonos körzőnyílással A és B középpontú köröket rajzolunk. Ezek két pontban metszik egymást, az AB szakasz felező merőlegesén. A felező merőleges és az AB egyenes metszéspontja egyben az AB szakasz felezőpontja, ezt O-val jelöljük.



3. lépés. Megszerkesztjük az O középpontú, AB átmérőjű félkört. Ezután D-ben merőlegest kell állítanunk az AB-re. Körző és vonalzó segítségével megszerkesztjük egy D középpontú szakasz felező merőlegesét. Az így kapott, D-ben az AB átmérőre állított merőleges C-ben metszi a kört. Mivel félkörbe van írva, az ABC háromszög derékszögű C-ben és CD az átfogóhoz tartozó magassága. A magasságtétel szerint $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{a \cdot b}$.



A CO sugár az átmérő hosszának a fele, tehát $CO = \frac{AB}{2} = \frac{AD + DB}{2} = \frac{a+b}{2}$. Bármely derékszögű háromszögben a befogó hossza kisebb, mint az átfogó hossza. A DCO háromszög derékszögű, tehát $DC \le CO$, vagyis $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$.

Jegyezd meg!

Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók átfogóra eső vetületeinek mértani közepe.
Ha az ABC háromszög nem tompaszögű, és az AD magasság mértani közepe az AB és AC oldalak BC-re eső vetületeinek, akkor a háromszög A-ban derékszögű.

Gyakorlatok és feladatok

1. Rajzoljatok egy ABC derékszögű háromszöget ($A\sphericalangle = 90°$), és húzzátok meg az ABC háromszög AD magasságvonalát és az ACD háromszög DE magasságvonalát. Döntsétek el a következő kijelentések logikai értékét:

p_1: Az ABC háromszögben az AB befogó vetülete a BC átfogóra BD.

p_2: Az ACD háromszögben CD befogó vetülete az AC átfogóra AE.

p_3: $AD^2 = BD \cdot DC$

p_4: $DE^2 = AE + EC$

2. Számítsátok ki egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságot, ha a befogók átfogóra eső vetülete:

a) 5 cm és 20 cm; b) x és $4x$, ahol $x > 0$;

c) 16 cm és 9 cm; d) 2,7 cm és 1,2 cm;

e) $\sqrt{3}$ dm és $3\sqrt{3}$ dm.

3. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$.

a) Ha $BD = 8$ cm és $CD = 18$ cm, határozzátok meg AD.

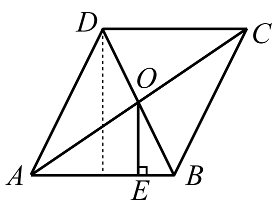
b) Ha $AD = 12$ cm és $CD = 8$ cm, határozzátok meg BD-t és BC-t.

4. Adott DEF háromszögben $D\sphericalangle = E\sphericalangle + F\sphericalangle$ és $DA \perp EF$, $A \in EF$. Ha $AD = 10$ cm és $EF = 5 \cdot AE$, számítsátok ki az AE, AF és EF szakaszok hosszát.

5. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90°$, $AM \perp BC$, $M \in BC$, $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{1}{4}$ és $BC = 20$ cm. Számítsátok ki AM szakasz hosszát és az ABC háromszög területét.

6. A $TRAP$ derékszögű trapézban $T\sphericalangle = P\sphericalangle = 90°$, $TR = 30$ cm, $AP = 18$ cm és $TA \perp AR$. Számítsátok ki a trapéz magasságát.

7. Az $ABCD$ rombusz magassága 20 cm és $AC \cap BD = \{O\}$. Az OB szakasz AB oldalra eső vetülete 5 cm. Számítsátok ki a rombusz kerületét.



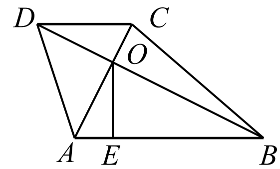
8. Az $ABCD$ téglalapban az A pont vetülete a BD átlóra az E pont, $BE = 3\,DE$, és $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Határozzátok meg a $\dfrac{DE}{EO}$ arány értékét.

b) Ha $BD = 8\sqrt{2}$ cm, számítsátok ki AE szakasz hosszát.

c) Határozzátok meg az átlók által közrezárt hegyesszög mértékét.

9. Az $ABCD$ trapéz átlói merőlegesek egymásra, $AC \cap BD = \{O\}$, és az O pont vetülete az AB nagy alapra E. Tudjuk, hogy $AE = 2$ cm és $BE = 8$ cm.



a) Számítsátok ki az OE szakasz hosszát.

b) Ha $CD = 5$ cm, számítsátok ki a trapéz területét.

10. Az $MNPQ$ téglalapban $MA \perp NQ$, $A \in NQ$ és $MA \cap PQ = \{B\}$. Ha $AN = 12$ cm, $AQ = 27$ cm számítsátok ki az MA és MB szakasz hosszát.

11. Az ABC egyenlő szárú háromszögben AM a BC alaphoz tartozó magasságvonal, és $MD \perp AB$, $D \in AB$, $ME \perp AC$, $E \in AC$. Tudjuk, hogy $MD = 2\sqrt{3}$ cm és $AD = 2\sqrt{6}$ cm.

a) Határozzátok meg az AB szakasz hosszát.

b) Igazoljátok, hogy $DE \perp AM$ és számítsátok ki a DE szakasz hosszát.

12. Az ABM egyenlő oldalú háromszögben jelöljük D-vel a BM oldal felezőpontját. Vegyük fel a BM egyenesen a C pontot úgy, hogy M a BC szakasz felezőpontja legyen. Igazoljátok, hogy $AD^2 = \dfrac{3BC^2}{16}$.

13. Az AMN háromszögben AD magasságvonal, $D \in MN$ és $AD = 3\sqrt{6}$ cm, $MD = 9$ cm, $ND = 6$ cm. Igazoljátok, hogy az AMN háromszög derékszögű.

14. Az AMN háromszögben AD magasságvonal $D \in MN$ és $AD = a \cdot MD$, $ND = a \cdot AD$, $a > 0$. Igazoljátok, hogy az AMN háromszög derékszögű.

15. A $DREP$ téglalapban $DR = 16$ cm és $RE = 8$ cm. Hosszabbítsátok meg a DR szakaszt $RQ = \dfrac{RE}{2}$ -vel. Igazoljátok, hogy $DE \perp EQ$.

3.ℓ. A befogótétel

Emlékeztető

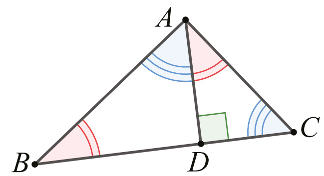
Ha egy derékszögű háromszögben meghúzzuk az átfogóhoz tartozó magasságvonalat, három derékszögű háromszöget figyelhetünk meg, amelyek közül bármely kettő hasonló.
Valóban, az ABC derékszögű háromszögben ($BAC\sphericalangle = 90°$) az átfogóhoz tartozó AD magasságvonal az alábbi szög-kongruenciákat eredményezi:

- $BAC\sphericalangle \equiv ADB\sphericalangle \equiv ADC\sphericalangle$ (mert derékszögek);
- $ABD\sphericalangle \equiv DAC\sphericalangle$ (mert mindkettőnek a BAD szög a pótszöge);
- $BAD\sphericalangle \equiv ACD\sphericalangle$ (mert mindkettőnek a CAD szög a pótszöge).

Az ABD és CAD háromszögek hasonlóságát alkalmazva igazoltuk a magasságtételt. Lássuk, milyen eredményre jutunk a másik két háromszög-pár, az ABC és DBA illetve az ABC és DAC háromszögek hasonlósága alapján?

Fedezzük fel, értsük meg!

1. tétel. A befogótétel
Egy derékszögű háromszögben bármelyik befogó négyzete egyenlő az átfogó és a befogó átfogóra eső vetületének szorzatával.



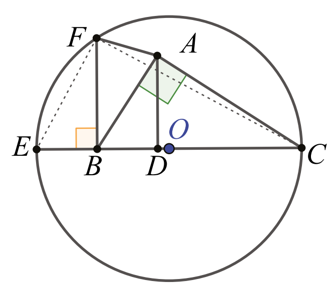
Bizonyítás. Az ABC és DBA háromszögek hasonlóak, mert a $BAC\sphericalangle$ és $ADB\sphericalangle$ derékszög, az $ABC\sphericalangle$ és $ABD\sphericalangle$ pedig közös szög. Felírjuk a megfelelő oldalakra vonatkozó aránysort: $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AD}$.

Az $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{AB}$, arányból következik, hogy $AB^2 = BC \cdot BD$.

Hasonló módon, az ABC és DAC háromszögek hasonlóak, mert a $ACB\sphericalangle$ és $ACD\sphericalangle$ derékszög, az $ACB\sphericalangle$ és $ACD\sphericalangle$ közös szög. Ebből következik, hogy $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$ az $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$, aránypárból pedig, hogy $AC^2 = BC \cdot CD$.

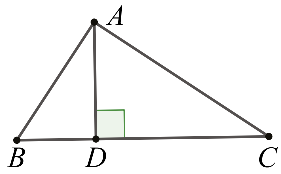
Megjegyzés. A befogótételben szereplő egyenlőségek $AB = \sqrt{BC \cdot BD}$ illetve $AC = \sqrt{BC \cdot CD}$ alakban is írhatók. Ezek alapján a befogótétel így is fogalmazható: *Egy derékszögű háromszög bármelyik befogója az átfogónak és a befogó átfogóra eső vetületének mértani közepe.*

Alkalmazás



1. alkalmazás. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, AD az átfogóhoz tartozó magasságvonal és E a D pont B szerinti szimmetrikusa. A B pontba állított merőleges az EC átmérőjű kört F-ben metszi. Igazoljuk, hogy a BFA háromszög egyenlő szárú!
Megoldás. Mivel a BAC háromszög derékszögű, alkalmazhatjuk a befogótételt: $AB^2 = BC \cdot BD$.
Az $EFC\Delta$ félkörbe írt háromszög, tehát derékszögű. Alkalmazzuk az FB magasságra a magasságtételt: $FB^2 = BC \cdot BE$. Mivel E a D pont B szerinti szimmetrikusa, $BD \equiv BE$. Ebből következik, hogy $AB^2 = FB^2$, vagyis $BA \equiv BF$, tehát a BFA háromszög egyenlő szárú.

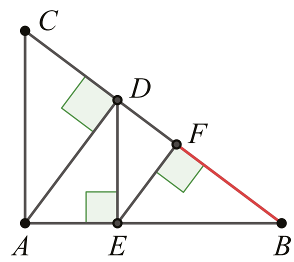
2. tétel
A befogótétel fordított tétele: Az ABC háromszögben $D = pr_{BC}A$. Ha a D pont a BC szakaszon helyezkedik el és $AB^2 = BC \cdot BD$ vagy $AC^2 = BC \cdot CD$, akkor az ABC háromszög A-ban derékszögű.



Bizonyítás: Megszerkesztjük az A pont vetületét a BC-re. A feltétel szerint D a BC szakaszon található. Az $AB^2 = BC \cdot BD$ feltételt így is írhatjuk: $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA}$.
A kapott aránypárban a számlálók a BAC háromszög oldalai, a nevezők pedig a BDA háromszög oldalai. A két háromszögben $ABC\sphericalangle \equiv DBA\sphericalangle$ és mint közös szögek, így az O.SZ.O. eset szerint a két háromszög hasonló. A hasonló háromszögek megfelelő szögei kongruensek: $BAC\sphericalangle \equiv BDA\sphericalangle$. A $BDA\sphericalangle$ derékszög, így a $BAC\sphericalangle$ is derékszög, tehát az ABC háromszög A-ban derékszögű, amit igazolni kellett. Hasonlóan végezzük el a bizonyítást az $AC^2 = BC \cdot CD$ összefüggésből kiindulva is.

Feladat a portfólióba

Igazoljátok ellenpéldával, hogy a befogótétel fordított tétele nem érvényes abban az esetben, ha az A pont BC egyenesre eső vetülete kívül esik a BC szakaszon!



2. alkalmazás. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90°$, AD magasságvonal, E a D pont vetülete az AB egyenesre és F az E pont vetülete a BC egyenesre. Számítsuk ki a BF szakasz hosszát, ha $AB = 18$ cm és $BC = 27$ cm!
Megoldás. A feladatban több derékszögű háromszög és szerepel és az átfogóhoz tartozó magasságvonal. Ismételten alkalmazzuk a befogótételt. Az ABC háromszögben $\sphericalangle A = 90°$, az AD az átfogóhoz tartozó magasság $AB^2 = BC \cdot BD$, ebből következik, hogy $BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{324}{27} = 12$ (cm).
Az ABD háromszögben $ADB\sphericalangle = 90°$, DE az átfogóhoz tartozó magasság:
$BD^2 = BE \cdot AB$ ebből következik, hogy $BE = \frac{BD^2}{AB} = \frac{144}{18} = 8$ (cm).
Végül a BDE háromszögben $BED\sphericalangle = 90°$, az EF az átfogóhoz tartozó magasság $BE^2 = BD \cdot BF$, ebből következik, hogy $BF = \frac{BE^2}{BD} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$ (cm).

3. alkalmazás: Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, AD magasságvonal, E a D pont vetülete az AB egyenesre és F az E pont vetülete a BC egyenesre.
a) Számítsuk ki a BF szakasz hosszát, ha $AB = c$ és $BC = a$.
b) Határozzuk meg a BF szakasz hosszát, ha $AB = 18$ cm, $BC = 27$ cm.
Megoldás: $BAC\sphericalangle = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $DE \perp AB$, tehát az ABC, ABD és BDE háromszögek derékszögűek. Ezekben a háromszögekben AD, DE és EF az átfogóhoz tartozó magasságvonalak.

A BF szakasz hosszát a BED, háromszögben a befogótétel alapján számoljuk ki $BF = \frac{BE^2}{BD}$.

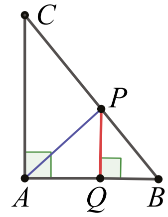
A BE szakasz a BD befogó átfogóra eső vetülete az ADB háromszögben, tehát $BE = \frac{BD^2}{AB}$.

A BD szakasz az AB befogó átfogóra eső vetülete az ABC háromszögben, tehát $BD = \frac{AB^2}{BC}$.

Behelyettesítve, megkapjuk a végeredményt $BF=\dfrac{BE^2}{BD}=\left(\dfrac{BD^2}{AB}\right)^2\cdot\dfrac{1}{BD}=\dfrac{BD^3}{AB^2}=\left(\dfrac{AB^2}{BC}\right)^3\cdot\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{AB^4}{BC^3}=\dfrac{c^4}{a^3}$.

b) Ha $c = 18$ cm és $a = 27$ cm, akkor $BF=\dfrac{c^4}{a^3}=\dfrac{18^4}{27^3}=\dfrac{2^4\cdot 3^8}{3^9}=\dfrac{2^4}{3}=\dfrac{16}{3}$ (cm).

4. alkalmazás. Az ABC derékszögű háromszög átfogóján található a P pont. Tudjuk, hogy $PB = 6$ cm. P-nek az AB-re eső vetülete Q, $QA = 5$ cm és $QB = 4$ cm. Számítsuk ki az AP és BC szakasz hosszát!



Megoldás. P az ABC háromszög átfogóján helyezkedik el, a $PAB\sphericalangle$ és $PBA\sphericalangle$ hegyesszög, tehát a Q pont, mint a P pont AB egyenesre eső vetülete, az AB szakasz belső pontja.
Az APB háromszögben $PQ \perp AB$, $Q \in AB$, $PB^2 = BQ \cdot BA = 4 \cdot 9 = 36$.
A befogótétel fordított tétele szerint az ABP háromszög derékszögű: $APB\sphericalangle = 90^\circ$.
Az APB háromszögben alkalmazzuk a befogótételt: $AP^2 = AQ\cdot AB = 45$, tehát $AP = 3\sqrt{5}$ (cm).
Az ABC háromszögben a befogótétel szerint $AB^2 = BC \cdot BP$, tehát $81 = BC \cdot 6$, végül $BC = 13{,}5$ (cm).

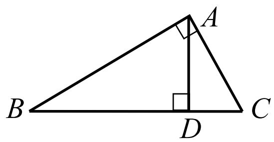
!

Jegyezd meg!

- A magasságtétel és a befogótétel két metrikus összefüggés. A háromszög magassága, befogói, átfogója és a befogók átfogóra eső vetülete közt fennálló kapcsolatokat fejezi ki.
- A befogótétel és a magasságtétel fordított tételei alapján gyakran igazolható két egyenes merőlegessége.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$ és $AD \perp BC$.



Állapítsátok meg a következő kijelentések logikai értékét:
p_1: Az AB befogó BC átfogóra eső vetülete BD.
p_2: Az AC befogó BD átfogóra eső vetülete BC.
p_3: $AB^2 = BC \cdot BD$.
p_4: $AC=\sqrt{BD\cdot DC}$.

2. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, AD magasságvonal, az ABD háromszögben pedig DE magasságvonal. Ha $AD = 24$ cm és $DC = 18$ cm, számítsátok ki a BD, AC és AE szakaszok hosszát!

3. Az $ABCD$ paralelogrammában $CD = 18$ cm és az A és B szögek szögfelezői az E pontban metszik egymást.
a) Igazoljátok, hogy az ABE háromszög derékszögű!
b) Ha $AB = 3\,BE$, számítsátok ki a BE szakasz AB-re eső vetületét!

4. Számítsátok ki egy derékszögű háromszög befogóinak hosszát, ha a befogók átfogóra eső vetülete:
a) 9 cm és 16 cm;
b) 4 cm és 12 cm;
c) $9\sqrt{3}$ cm és $3\sqrt{3}$ cm;
d) x cm és $9x$ cm, $x > 0$.

5. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 4{,}5$ cm és $BE \perp BD$, $E \in CD$. Ha $DE = 12{,}5$ cm, számítsátok ki a BE szakasz hosszát és a téglalap kerületét!

6. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$.

a) Ha $BC = 20$ cm, $BD = 7{,}2$ cm, számítsátok ki a CD, AB és AC szakasz hosszát!

b) Ha $BC = 6$ cm, $BD = 0{,}4$ dm, számítsátok ki a DC, AC és AB szakasz hosszát!

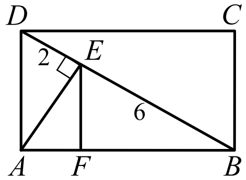
c) Ha $AB = 5\sqrt{6}$ m, $BC = 25$ m, számítsátok ki a BD, CD és AC szakasz hosszát!

d) Ha $AB = 2x$ cm, $BD = x$ cm, számítsátok ki BC és AC szakasz hosszát!

7. A DEF háromszög derékszögű D-ben, $DG \perp EF$, $G \in EF$. A DG egyenes L-ben metszi az F ponton keresztül, DE-vel párhuzamosan húzott egyenest. $DE = 15$ cm és $EF = 25$ cm. Számítsátok ki az EG, DF és FL szakaszok hosszát!

8. Az $ROMB$ rombuszban $RM \cap OB = \{A\}$ és $AC \perp BM$, $C \in MB$. Ha az OB átló hossza 24 cm és $BC = 8$ cm, számítsátok ki a rombusz oldalának és másik átlójának hosszát!

9. Az $ABCD$ téglalap AB és AD oldalának a BD átlóra eső vetülete 2 cm illetve 6 cm.



a) Számítsátok ki a téglalap méreteit!

b) Ha $AE \perp BD$, $E \in BD$ és $EF \perp AB$, $F \in AB$ számítsátok ki a BEF háromszög területét!

10. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, Az AM oldalfelező az AD magasságvonallal 30°-os szöget zár be. Számítsátok ki:

a) a $\dfrac{DM}{BC}$ arány értékét!

b) az $\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$ kifejezés értékét!

11. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, AD magasságvonal és $CD = 3 \cdot BD$. Határozzátok meg az $ABC\sphericalangle$ mértékét!

12. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $DE \perp AB$, $E \in AB$ és $DF \perp AC$, $F \in AC$.

a) Bizonyítsátok be, hogy $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AC}{AB}$.

b) Igazoljátok, hogy az AEF és ACB háromszögek hasonlóak!

c) Ha $BD = 3$ cm és $BC = 15$ cm, számítsátok ki EF szakasz hosszát!

13. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 135^\circ$ a D és E pont a BC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $AD \perp BC$, $CD = 6$ cm, $CE = 8$ cm és $AE = 4$ cm.

a) Igazoljátok, hogy az AEC háromszög derékszögű!

b) Számítsátok ki a BE szakasz hosszát!

14. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $BAC\sphericalangle = 120^\circ$, AD a háromszög magasságvonala és AP a $BAC\sphericalangle$ szögfelezője, $P \in BC$, $AP = 2\sqrt{3}$ cm.

a) Igazoljátok, hogy az APC háromszög derékszögű!

b) Számítsátok ki az AC és BC szakasz hosszát!

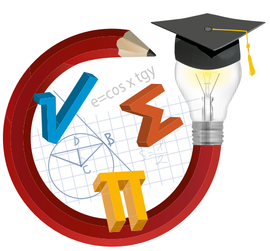
15. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 30^\circ$, $AB = 10$ cm, $BD \perp AC$, $D \in AC$. A BD szakasz BC egyenesre eső vetülete 2,5 cm. Igazoljátok, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

16. Egy derékszögű háromszög átfogója 9 cm, a befogók átfogóra eső vetülete, centiméterben kifejezve, két prímszám. Számítsátok ki a háromszög befogóinak hosszát!

17. Az $ABCD$ rombusz kerülete 60 cm és $BD \equiv CD$. Az AB egyenesre A-ban állított merőleges a BD egyenest az E pontban metszi. Számítsátok ki:

a) az AB szakasz BE egyenesre eső vetületét!

b) az ACE háromszög kerületét!

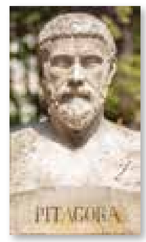


7.2. Pitagorasz tétele. Pitagorasz tételének fordított tétele

Emlékeztető

A befogótétel alapján kiszámítható egy derékszögű háromszög valamely befogójának hossza, mint az átfogó és a befogó átfogóra eső vetületének mértani közepe.
A derékszöghöz tartozó csúcsnak az átfogó tartóegyenesére eső vetülete az átfogó belső pontja, tehát a két befogó vetületének összege egyenlő az átfogóval.

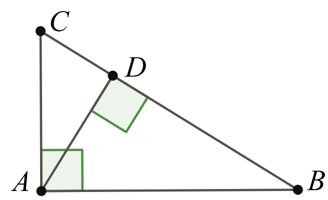
Ezt a két megfigyelést felhasználva bizonyíthatjuk a derékszögű háromszög geometriájának egyik legszebb eredményét, a Pitagorasz-tételt, amelyet hatodik osztályból ismerünk.
Valószínűleg a matematika összes tétele közül a Pitagorasz-tételnek ismeretes a legtöbb bizonyítása.



Fedezzük fel, értsük meg!

Pitagorasz tétele.
Egy derékszögű háromszögben az átfogó hosszának négyzete egyenlő a két befogó hosszának négyzetösszegével.

Bizonyítás. Az ABC derékszögű háromszögben ($A\sphericalangle = 90^\circ$), jelöljük D-vel az A pont BC-re eső vetületét. Mivel B és C hegyesszögek, a D pont a BC oldalon található, BD és CD az AB illetve AC befogó átfogóra eső vetülete.



A befogótételt alkalmazva $BD = \dfrac{AB^2}{BC}$ és $CD = \dfrac{AC^2}{BC}$.

$BD + CD = BC$, ide behelyettesítve: $\dfrac{AB^2}{BC} + \dfrac{AC^2}{BC} = BC$, végül $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Megjegyzés. A Pitagorasz-tétel segítségével ki tudjuk számítani a derékszögű háromszög egyik oldalának hosszát, ha ismerjük a másik két oldalt:

1) ha ismerjük a befogók hosszát, az átfogó: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$;

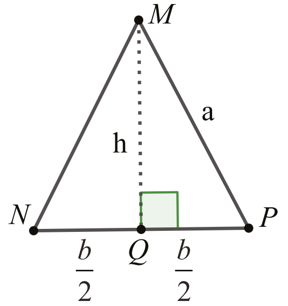
2) ha ismerjük az egyik befogó és az átfogó hosszát, a másik befogó: $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$, vagy
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$.

Feladat a portfólióba

Döntsétek el, melyik igaz a következő állítások közül:
1) Egy négyzetben a két átló hosszának négyzetösszege egyenlő a négy oldal hosszának négyzetösszegével.
2) Egy téglalapban a két átló hosszának négyzetösszege egyenlő a négy oldal hosszának négyzetösszegével.
3) Egy rombuszban a két átló hosszának négyzetösszege egyenlő a négy oldal hosszának négyzetösszegével.

Alkalmazás

1. alkalmazás



a) Az MNP egyenlő szárú háromszögben $MN = MP = 15$ cm és $NP = 18$ cm. Számítsuk ki az alaphoz tartozó magasság hosszát!

b) Egy egyenlő szárú háromszögben a szárak hossza a és az alap hossza b. Igazoljuk, hogy az alaphoz tartozó magasság hossza: $h=\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{4}}$.

c) Az $MNPQ$ egyenlő szárú trapézban $MN \parallel PQ$, $MN = 30$ cm, $PQ = 16$ cm és $MQ = 25$ cm. Számítsuk ki a trapéz magasságát!

d) Egy egyenlő szárú trapézban az alapok hossza B illetve b, a szárak hossza l. Igazoljuk, hogy a trapéz magassága: $h=\sqrt{l^2-\dfrac{(B-b)^2}{4}}$.

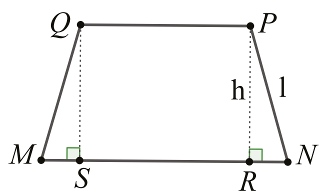
Megoldás: a) Az MNP egyenlő szárú háromszög alapja NP. Jelöljük Q-val az M pont NP oldalra eső vetületét! MQ az alaphoz tartozó magasság, tehát MQ oldalfelező is: $QP=\dfrac{NP}{2}=9$ (cm). Jelölés: $MQ = h$

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az MQP derékszögű háromszögben, $MQP\sphericalangle = 90°$

$h = MQ = \sqrt{MP^2-QP^2}$, $h=\sqrt{15^2-9^2}=12$ cm.

b) Az előző gondolatmenet szerint $QP=\dfrac{b}{2}$, $MP = a$ és $MQ = h$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az MQP derékszögű háromszögben ($\sphericalangle MQP = 90°$): $h = MQ = \sqrt{MP^2-QP^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{4}}$.

c) Az $MNPQ$ egyenlő szárú trapézban ($MN \parallel PQ$) jelöljük a P és Q pont nagyalapra eső vetületét R-rel illetve S-sel. $MS=RN=\dfrac{MN-PQ}{2}=7$ cm, $MQ = NP = 25$ cm, $h = PR = QS$.



Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a PRN derékszögű háromszögben:

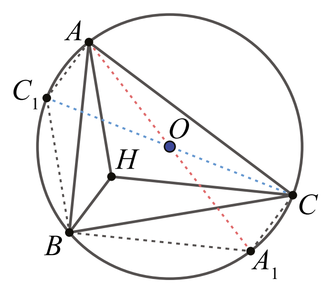
$h=PR=\sqrt{PN^2-RN^2}$, tehát $h=\sqrt{25^2-7^2}=\sqrt{576}=24$ (cm).

d) $MS=RN=\dfrac{B-b}{2}$, $MQ = NP = l$, $h = PR = QS$.

Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a PRN derékszögű háromszögben

$h=PR=\sqrt{PN^2-RN^2}=\sqrt{l^2-\dfrac{(B-b)^2}{4}}$.

2. alkalmazás. Az ABC háromszögben H a magasságpont (ortocentrum).



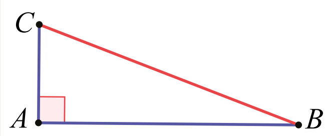
Igazoljuk, hogy $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$.

Megoldás. Figyeljük a mellékelt ábrát! Megrajzoltuk az ABC háromszög körüli kört és megjelöltük A_1-gyel és C_1-gyel az A illetve C pontok átmérősen ellentett pontjait. Az ABA_1, ACA_1, CAC_1 és CBC_1 szögek derékszögek, tehát $A_1B \perp AB$, $A_1C \perp AC$, $C_1A \perp AC$ és $C_1B \perp CB$. Mivel H magasságpont, $AH \perp BC$, $BH \perp AC$ és $CH \perp AB$. Ebből következik, hogy $AH \parallel C_1B$ és $BH \parallel C_1A$, tehát $BHAC_1$ paralelogramma. Hasonlóan $BHCA_1$ is paralelogramma. Következik, hogy $BH \equiv A_1C$ és $CH \equiv A_1B$. Az AA_1C és AA_1B háromszög derékszögű, tehát alkalmazható a Pitagorasz-tétel:

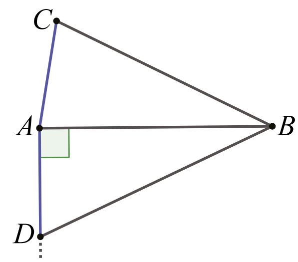
$AA_1^2 = AC^2 + A_1C^2$ és $AA_1^2 = AB^2 + A_1B^2$, vagyis $AC^2 + BH^2 = AB^2 + CH^2$.

Hasonlóan, a $BHAC_1$ paralelogrammában $CC_1^2 = AC^2 + BH^2$ és $CC_1^2 = BC^2 + AH^2$, tehát $AC^2 + BH^2 = BC^2 + AH^2$.

A Pitagorasz-tétel fordított tétele
Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű, és a derékszög a harmadik oldallal szemben helyezkedik el.
A mellékelt ábra jelöléseivel a Pitagorasz-tétel fordított tétele: *Ha az ABC háromszög oldalai közt fennáll a* $BC^2 = AB^2 + AC^2$ *összefüggés, akkor a háromszög derékszögű A-ban.*



Bizonyítás. Az A pontban merőlegest emelünk AB-re, melyen felvesszük a D pontot úgy, hogy $AD \equiv AC$, és D és C az AB egyenes különböző oldalán helyezkedjen el. Az ABD derékszögű háromszögben $BAD\sphericalangle = 90^\circ$ Pitagorasz tétele szerint: $BD^2 = AB^2 + AD^2$. A feltevésből, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2$. Következik, hogy $BD \equiv BC$. Az ABD és ABC háromszögben $AB \equiv AB$, $AD \equiv AC$ és $BD \equiv BC$, tehát az O.O.O. egybevágósági eset szerint az ABD és ABC háromszögek kongruensek. Következik, hogy a $BAC\sphericalangle$ és $BAD\sphericalangle$ szögek is kongruensek. Mivel $BAD\sphericalangle = 90^\circ$, az ABC háromszög derékszögű és átfogója BC.



A Pitagorasz-tétel fordítottja módszert kínál arra, hogy igazoljuk egy háromszögről, hogy derékszögű.
Ha ismerjük egy háromszög oldalhosszait, a következő eljárás szerint döntjük el, hogy derékszögű-e:

1) Növekvő sorrendbe rendezzük az oldalhosszakat.
2) A kapott sorrendben négyzetre emeljük az értékeket.
3) A két rövidebb oldal hosszának négyzetét összeadjuk és összehasonlítjuk a legnagyobb oldal hosszának négyzetével.
4) Értelmezzük az eredményt: ha egyenlőséget kapunk, a Pitagorasz-tétel fordítottja alapján a háromszög derékszögű és a derékszög a leghosszabb oldallal szemben helyezkedik el.

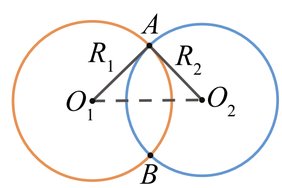
Ellenkező esetben a háromszög nem derékszögű.

Példák.

a) Az ABC háromszögben $AB = 3$, $AC = 4$ és $BC = 5$. A háromszög A-ban derékszögű, mert:
1) $3 < 4 < 5$;
2) $9 < 16 < 25$;
3) $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = BC^2$.

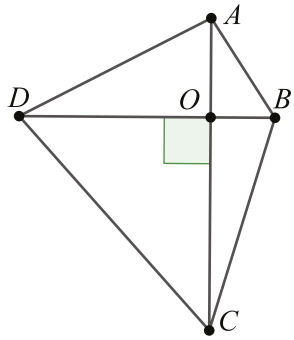
b) Az MNP háromszögben $MN = 4$, $MP = 5$ és $NP = 6$. A háromszög nem derékszögű, mert:
1) $4 < 5 < 6$;
2) $16 < 25 < 36$;
3) $6 + 25 \neq 36$.

3. alkalmazás. Szerkesszünk egy O_1 középpontú $R_1 = 21$ cm, sugarú és egy O_2 középpontú, $R_2 = 20$ cm sugarú kört. Tudjuk, hogy $O_1O_2 = 29$ cm, a két kör az A és B pontban metszi egymást. Igazoljuk, hogy az O_1A egyenes a $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ kör érintője és az O_2B egyenes a $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ kör érintője.

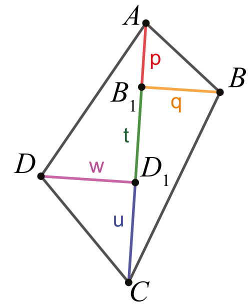


Megoldás: Ahhoz, hogy O_1A az O_2 középpontú kör érintője legyen, elegendő bizonyítani, hogy $O_1A \perp O_2A$.
A Pitagorasz-tételének fordítottja alapján ellenőrizzük, hogy az $O_1O_2\ A$ háromszög derékszögű.
$O_1O_2^{\ 2} = 29^2 = 841$ és $O_1A^2 + O_2A^2 = 21^2 + 20^2 = 841$.
A két érték azonos, tehát a Pitagorasz-tétel fordított tételének alapján az O_1O_2A háromszög derékszögű A-ban.
Ebből következik, hogy az O_1A egyenes A-ban érinti az O_2 középpontú kört.
Hasonlóan járunk el az O_1O_2B háromszögben: $O_1O_2^{\ 2} = 29^2 = 841 = 21^2 + 20^2 = O_1B^2 + O_2B^2$. Az egyenlőségből következik, hogy $O_1BO_2\sphericalangle = 90^\circ$, tehát az O_2B egyenes a $\mathcal{C}(O_1,R_1)$ kör érintője.

4. alkalmazás. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlói merőlegesek egymásra.
a) Igazoljuk, hogy a szemben fekvő oldalak négyzeteinek összege állandó!
b) Jelentsük ki és igazoljuk a kijelentés fordítottját!



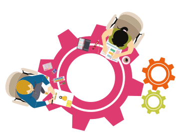
Megoldás. a) Jelöljük az átlók metszéspontját O-val. Mivel az átlók merőlegesek egymásra, az OAB, OBC, OCD és ODA háromszögek derékszögűek.
Alkalmazva a Pitagorasz-tételt ezekben a háromszögekben, megkapjuk a szemben fekvő oldalak négyzetösszegeit: $AD^2 + BC^2 = (AO^2 + DO^2) + (BO^2 + CO^2)$ és $AB^2 + DC^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2)$. Tehát $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$.
b) A kijelentés fordítottja: Ha egy konvex négyszögben a szemben fekvő oldalak négyzetösszege egyenlő, akkor a négyszög átlói merőlegesek egymásra.
Tételezzük fel, hogy az átlók nem merőlegesek egymásra! Jelöljük a B és D pontok AC egyenesre eső vetületeit B_1-gyel illetve D_1-gyel. Mivel $B_1 \neq D_1$, először tekintsük az AC egyenesen az A–B_1–D_1–C sorrendet. Az írás megkönnyítése céljából bevezetjük az $AB_1 = p$, $B_1D_1 = t$, $D_1C = u$, $DD_1 = w$ és $BB_1 = q$ jelölést.



A BB_1A és DD_1C derékszögű háromszögekben a Pitagorasz-tétel szerint:
$AB^2 + DC^2 = p^2 + q^2 + u^2 + w^2$.
Hasonlóan, a BB_1C és DD_1A derékszögű háromszögekben:
$AD^2 + BC^2 = (p + t)^2 + w^2 + q^2 + (u + t)^2$.
A szemben fekvő oldalak négyzetösszege egyenlő, tehát $p^2 + u^2 = (p + t)^2 + (u + t)^2$.
A kapott összefüggés pozitív számok esetén lehetetlen. Hasonlóan járunk el abban az esetben is, ha az AC egyenesen a pontok sorrendje: A–D_1–B_1–C.
Ellentmondáshoz jutottunk, tehát a feltételezés hamis, vagyis az átlók merőlegesek egymásra.

Jegyezd meg!

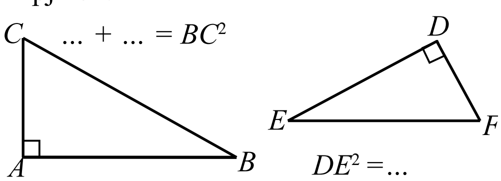
Pitagorasz tétele: Egy derékszögű háromszögben az átfogó hosszának négyzete egyenlő a két befogó hosszának négyzetösszegével.
A Pitagorasz tételének fordított tétele: Ha egy háromszögben két oldal hosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának a négyzetével, akkor a háromszög derékszögű, és a derékszög a harmadik oldallal szemben helyezkedik el.



Gyakorlatok és feladatok

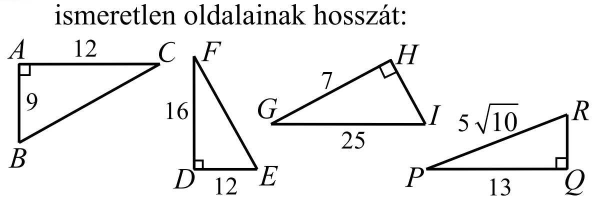
1. Elemezzétek a mellékelt ábrákat, rajzoljátok le és egészítsétek ki úgy, hogy igaz kijelentéseket kapjatok.

$\ldots + \ldots = BC^2$



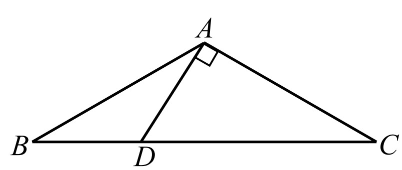
$DE^2 = \ldots$

2. Számítsátok ki a mellékelt háromszögek ismeretlen oldalainak hosszát:



3. Az ABC háromszög egyenlő szárú, $AB = AC = 25$ cm és $BC = 40$ cm. Számítsátok ki a háromszög magasságainak $h_1 + h_2 + h_3$, összegét!

4. Az ABC háromszögben $AB = AC = 8\sqrt{3}$ cm és $BAC\sphericalangle = 120^\circ$. Az A-ban AC-re merőleges egyenes a BC oldalt a D-ben metszi. Számítsátok ki:
a) az $ABC\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögek mértékét;
b) a DC és BD szakaszok hosszát.



5. Számítsátok ki:

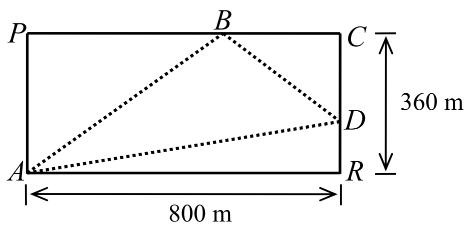
a) egy 8 cm oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög magasságát;

b) egy 48 cm kerületű négyzet átlójának hosszát;

c) egy téglalap átlójának hosszát, ha a téglalap méretei $2a$ és a;

d) egy rombusz kerületét, ha a rombusz átlói 2 cm és $2\sqrt{3}$ cm.

6. Mária egy *PARK* téglalap alakú park sétányain sétál (lásd a mellékelt ábrát). A B pontban egy szökőkút található, 480 m távolságra a P ponttól. A D pontban egy szobor található, 120 m távolságra az R ponttól. Mutassátok ki, hogy ha Mária az $A-B-D-A$ útvonalat teszi meg, az általa megtett út több, mint 1,8 km!



7. Az A, B és C pont a $\mathcal{C}(O,r)$ körön helyezkedik el, és $AOB\sphericalangle = 90^\circ$. A C pont az AB kis köríven található, $8\sqrt{2}$ cm távolságra az AO egyenestől és 4 cm távolságra a BO egyenestől. Számítsátok ki a kör sugarát!

8. Egy derékszögű háromszög egyik szögének mértéke 60°, az átfogó hossza $6\sqrt{3}$ cm. Számítsátok ki a háromszög kerületét!

9. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, BD oldalfelező és CE az $ACB\sphericalangle$ szögfelezője, $E \in AB$. Ha $BD = 50$ cm és $AC = 80$ cm, határozzátok meg az E pont távolságát a BC egyenestől!

10. Egy egyenlő szárú trapéz nagyalapja 8 cm, átlója $2\sqrt{13}$ cm és szárainak hossza $2\sqrt{3}$ cm. Számítsátok ki a trapéz magasságát!

11. Az ABC háromszögben $BC = a$, $AC = a\sqrt{3}$ és $AB = 2a$.

Igazoljátok, hogy $A\sphericalangle = \dfrac{1}{2} B\sphericalangle = \dfrac{1}{3} C\sphericalangle$.

12. Az *MNPQ* paralelogrammában $MN = 17$ cm, $NQ = 16$ cm és $MP = 30$ cm. Határozzátok meg a paralelogramma átlói által közrezárt szög mértékét!

13. A *DEF* derékszögű háromszögben a *DE* és *DF* befogók hossza 15 cm illetve 20 cm. Az M pont az *EF* átfogón helyezkedik el. Számítsátok ki a *DM* szakasz hosszát a következő helyzetekben:

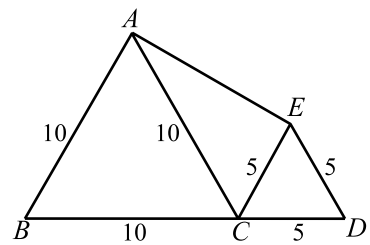
a) M a BC szakasz felezőpontja;

b) $MF = 4$ cm.

14. Az alábbi ábrán B, C és D kollineáris pontok. Bizonyítsátok be kétféleképpen, hogy az *ACE* háromszög derékszögű:

a) Pitagorasz tételének fordított tétele alapján.

b) Pitagorasz tételének fordított tétele nélkül.

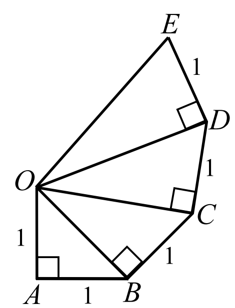


15. Az *OAB*, *OBC*, *OCD* és *ODE* háromszögek derékszögűek, $OAB\sphericalangle = OBC\sphericalangle = OCD\sphericalangle = ODE\sphericalangle = 90^\circ$ és $OA = AB = BC = CD = DE = 1$ cm (lásd az alábbi ábrát).

a) Számítsátok ki az *OB*, *OC*, *OD*, *OE* szakasz hosszát!

b) Ha $s = OA + OB + OC + OD + OE$, igazoljátok, hogy $7 < s < 10$.

c) Írjatok le egy eljárást, amellyel egy $\sqrt{10}$ cm hosszúságú szakaszt lehet szerkeszteni!

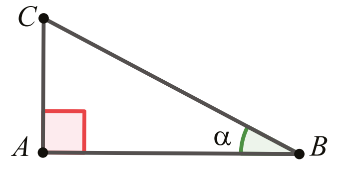


7.3. A trigonometria elemei a derékszögű háromszögben

Emlékeztető

1) Egy háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik, mint a kisebb szöggel szemben.
2) Egy derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb, mint bármelyik befogó.
3) Ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű, és a derékszög a harmadik oldallal szemben helyezkedik el.
4) Ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 30°-os, akkor a vele szemben fekvő befogó hossza egyenlő az átfogó hosszának felével.

Fedezzük fel, értsük meg!



Feladat. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90°$ és $B\sphericalangle = 30°$.

a) Számítsuk ki az $\frac{AC}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{AC}{AB}, \frac{AB}{AC}$ arányt!

b) Döntsük el, hogy az arányok értéke függ-e a háromszög oldalainak hosszától?

Megoldás: a) Ha $A\sphericalangle = 90°$ és $B\sphericalangle = 30°$, akkor $AC = \frac{BC}{2}$, ami aránypárként így írható: $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$. (1)

Az ABC háromszögben felírjuk a Pitagorasz-tételt: $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot BC^2}{4}}$, tehát

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC$ vagyis $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (2)

Végül $\frac{AB}{AC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot BC\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$ és $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (3)

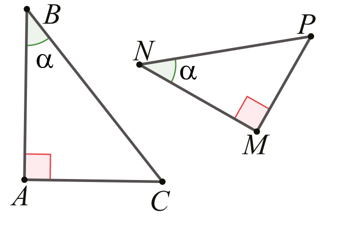
b) A fenti gondolatmenet és a számítások eredményei (az (1)-es, (2)-es és (3)-as összefüggések) nem függenek a háromszög oldalainak hosszától.

Megjegyzés. A fenti számításokban csak a következő tényezőket kellett figyelembe venni:
1) az ABC háromszög A-ban derékszögű;
2) a B szög mértéke 30°.
3) AC a 30°-os szöggel szemben fekvő befogó.

Következtetés: Minden derékszögű háromszögben, melynek van egy 30°-os szöge, a fenti négy arány értéke ugyanaz, függetlenül az oldalak hosszától.

Kérdések: 1) *Mivel magyarázható, hogy ezek az arányok nem függnek a háromszögek oldalaitól?*
2) *Vajon ezek az arányok más mértékű szögek esetén is ugyanazok?*
3) *Milyen értékeket vehetnek fel ezek az arányok?*

Hogy válaszolhassunk a kérdésekre, tekintsük az ABC és MNP derékszögű háromszögeket: $A\sphericalangle = M\sphericalangle = 90^\circ$ és $B\sphericalangle = N\sphericalangle = \alpha^\circ$, $0 < \alpha < 90$.
Ebből következik, hogy az ABC és MNP hasonló háromszögek (Sz.Sz. eset).
A C és P szögek hegyesszögek és kongruensek: $C\sphericalangle = P\sphericalangle = 90^\circ - \alpha^\circ$.

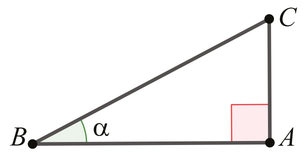


A megfelelő oldalakra vonatkozó aránysor: $\frac{AC}{MP}=\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}$, tehát $\frac{AC}{MP}=\frac{BC}{NP}$, $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}$ és $\frac{AC}{MP}=\frac{AB}{MN}$.

Ezekből származtatott aránypárok: $\frac{AC}{BC}=\frac{MP}{NP}$, $\frac{AB}{BC}=\frac{MN}{NP}$, $\frac{AC}{AB}=\frac{MP}{MN}$, $\frac{AB}{AC}=\frac{MN}{MP}$.

Figyeljük meg, hogy a hasonló háromszögek oldalai az alábbiak szerint vannak elrendezve:
1) AC és MP az $\alpha°$ mértékű szöggel szemben fekvő befogók;
2) AB és MN az $\alpha°$ mértékű szög melletti befogók;
3) BC és NP a két háromszög átfogója.

Következtetés:
Ha egy derékszögű háromszög egyik szögének mértéke $\alpha°$, akkor:



- az $\alpha°$ mértékű szöggel szemben fekvő befogó és az átfogó aránya állandó;
- az $\alpha°$ mértékű szög melletti befogó és az átfogó aránya állandó;
- az $\alpha°$ mértékű szöggel szemben fekvő és a mellette fekvő befogó aránya állandó;
- az $\alpha°$ mértékű szög melletti és a vele szemben fekvő befogó aránya állandó.

A fenti következtetések alapján értelmezhetők a szögfüggvények (trigonometrikus függvények), mint egy derékszögű háromszög két oldalának hányadosai és valamely hegyesszöge közt fennálló metrikus összefüggések.

Értelmezések	**Jelentés**
1. értelmezés: Ha egy derékszögű háromszög B hegyesszöge $\alpha°$, akkor a vele szemben levő befogó és az átfogó hosszának hányadosát az adott szög **szinuszának** nevezzük. Jelölése: sin B vagy $\sin\alpha°$.	$\sin\alpha°=\frac{AC}{BC}$
2. értelmezés: Ha egy derékszögű háromszög B hegyesszöge $\alpha°$, akkor a mellette levő befogó és az átfogó hosszának hányadosát az adott szög **koszinuszának** nevezzük. Jelölése: cos B vagy $\cos\alpha°$.	$\cos\alpha°=\frac{AB}{BC}$
3. értelmezés: Ha egy derékszögű háromszög B hegyesszöge $\alpha°$, akkor a vele szemben levő befogó és a mellette levő befogó hosszának hányadosát az adott szög **tangensének** nevezzük. Jelölése: tg B vagy $\mathrm{tg}\,\alpha°$.	$\mathrm{tg}\,\alpha°=\frac{AC}{AB}$
4. értelmezés: Ha egy derékszögű háromszög B hegyesszöge $\alpha°$, akkor a mellette levő befogó és a vele szemben levő befogó hosszának hányadosát az adott szög **kotangensének** nevezzük. Jelölése: ctg B vagy $\mathrm{ctg}\,\alpha°$.	$\mathrm{ctg}\,\alpha°=\frac{AB}{AC}$

1. alkalmazás. Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle=90°$ és $B\sphericalangle=\alpha°$, $0<\alpha<90$. Számítsuk ki a fenti értelmezések alapján:

a) $\frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}$; b) $\frac{\cos\alpha°}{\sin\alpha°}$; c) $(\sin\alpha°)^2+(\cos\alpha°)^2$; d) $\mathrm{tg}\alpha°\cdot\mathrm{ctg}\alpha°$.

Megoldás. a) $\frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}=\frac{AC}{BC}:\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{AB}=\mathrm{tg}\,\alpha°$, tehát $\frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}=\mathrm{tg}\,\alpha°$.

b) $\frac{\cos\alpha°}{\sin\alpha°}=\frac{AB}{BC}:\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AC}=\mathrm{ctg}\,\alpha°$, tehát $\frac{\cos\alpha°}{\sin\alpha°}=\mathrm{ctg}\,\alpha°$.

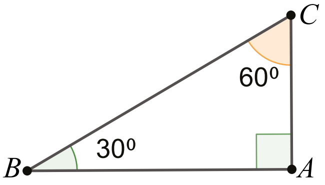
c) $\left(\sin\alpha°\right)^2+\left(\cos\alpha°\right)^2=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1$, tehát $\left(\sin\alpha°\right)^2+\left(\sin\alpha°\right)^2=1$.

d) $\mathrm{tg}\,\alpha°\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha°=\frac{\sin\alpha°}{\cos\alpha°}\cdot\frac{\cos\alpha°}{\sin\alpha°}=1$.

Megjegyzések. 1) Az fenti összefüggések érvényesek bármely derékszögű háromszögben.

2) A $(\sin\alpha°)^2+(\cos\alpha°)^2=1$ összefüggést *a trigonometria alapképletének* nevezzük.

3) $0<\sin\alpha°<1$ és $0<\cos\alpha°<1$ bármely α mértékű hegyesszög esetén.



2. alkalmazás. a) Számítsuk ki a sinα°, cosα°, tgα°, ctgα° értékét, ha α ∈ {30, 60}.
b) Számítsuk ki sinα°, cosα°, tgα°, ctgα° értékét, ha α = 45°.
Megoldás: Az $ABC\Delta$-ben $BAC\sphericalangle = 90°$ és $ABC\sphericalangle = 30°$, tehát $ACB\sphericalangle = 60°$.
$BC = 2\cdot x$ jelölést alkalmazva, a befogók hossza $AC = \dfrac{BC}{2} = x$ és $AB = x\sqrt{3}$.

a) **Ha α = 30°**: $\sin 30° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{x}{2\cdot x} = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2\cdot x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ és } \operatorname{ctg} 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1} = \sqrt{3}.$$

Ha α = 60°: $\sin 60° = \dfrac{AB}{BC} = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{AC}{BC} = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$,

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{AB}{AC} = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 60° = \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) **Ha α = 45°**, akkor az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle = 90°$, $ABC\sphericalangle = 45°$ és $ACB\sphericalangle = 45°$.

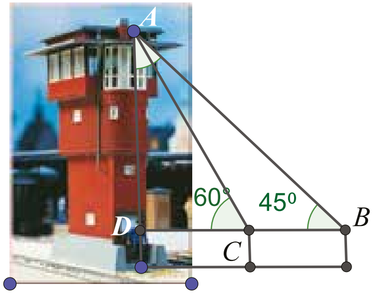
Alkalmazva az $AB = BC = x$ jelölést, a Pitagorasz-tétel alapján $BC = x\sqrt{2}$.

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = \frac{AC}{AB} = 1.$$

Alkalmazás

3. alkalmazás. Sanyi 20 méterre áll egy épülettől, amelynek tetejét 60°-os emelkedési szögben látja.
a) Milyen magas az épület?
b) Milyen távolságra álljon Sanyi az épülettől, hogy az emelkedési szög 45°-os legyen?



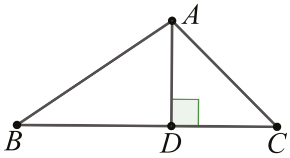
Megoldás: a) Sanyi a C pontban áll, $CD = 20$ m távolságra az épülettől, az épület magassága AD, $ADC\sphericalangle = 90°$ és $ACD\sphericalangle = 60°$. Az ADC derékszögű háromszögben ismerjük a CD befogót és meg kell határozzuk az AD befogót.
$\operatorname{tg} ACD\sphericalangle = \dfrac{AD}{CD}$, következik, hogy $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{AD}{20}$.
Tehát az épület magassága: $AD = 20 \cdot \operatorname{tg} 60° = 20\sqrt{3}$ (m).
b) Jelöljük B-vel azt a pontot, amelyből az épület teteje 45°-os emelkedési szögben látszik. Az ADB derékszögű háromszög egyenlő szárú, $AD = DB = 20\sqrt{3}$ (m). Tehát Sanyi $20\sqrt{3} \approx 34,64$ méter távolságra kell álljon az épülettől ahhoz, hogy az épület tetejét 45°-os szögben lássa.

Feladat a portfólióba

Hogyan tudná meghatározni Sanyi az épület magasságát, ha csak az emelkedési szögeket és a BC távolságot tudná megmérni?

4. alkalmazás. Számítsuk ki a C szög szinuszát az ABC általános háromszögben, amelyben $AB = 1$ dm, $BC = 1{,}4$ dm és $\sin B = \dfrac{3}{5}$.

Ne kapkodj!



Nem használhatjuk a $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$ összefüggést, mert nem tudjuk, hogy az $ABC\Delta$ derékszögű-e.

Megoldás. Az oldalak hosszát kifejezzük centiméterben: $AB = 10$ cm, $BC = 14$ cm. Meghúzzuk az AD magasságvonalat: $AD \perp BC$, $D \in BC$.

Az ABD háromszögben $ADB\sphericalangle = 90°$, $\sin B = \dfrac{AD}{AB}$, tehát $\dfrac{3}{5} = \dfrac{AD}{10}$.

Ebből következik, hogy $AD = 6$ cm. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt $BD^2 = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ (cm)
Az ADC háromszögben $ADC\sphericalangle = 90°$, $AD = 6$ cm és $DC = BC - BD = 6$ (cm).

Az ADC háromszög egyenlő szárú és derékszögű, tehát $ACD\sphericalangle = C\sphericalangle = 45°$ és $\sin C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. alkalmazás. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = B\sphericalangle + C\sphericalangle$, $AC = 5\sqrt{5}$ cm és $\sin ACB\sphericalangle = \dfrac{2}{3}$. Mutassuk ki, hogy a háromszög kerülete nagyobb, mint 36 cm.

Megoldás. Az $A\sphericalangle = B\sphericalangle + C\sphericalangle$ összefüggés eszünkbe juttatja a háromszög szögeinek összegére vonatkozó képletet: $A\sphericalangle + B\sphericalangle + C\sphericalangle = 180°$. Ezek alapján az $A\sphericalangle + A\sphericalangle = 180°$ egyenlőségre jutunk, tehát $A\sphericalangle = 90°$, vagyis az ABC háromszög derékszögű.

Mivel $\sin ACB\sphericalangle = \dfrac{2}{3}$, következik, hogy $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{3}$, tehát bevezethető a $AB = 2x$, $BC = 3x$ jelölés ($x > 0$).

Az ABC háromszögben a Pitagorasz-tételt szerint $BC^2 = AB^2 + AC^2$, következik $(3x)^2 = (2x)^2 + (5\sqrt{5})^2$.

Ebből kiszámítható $x = 5$ cm, $BC = 15$ cm és $AB = 10$ cm és $\mathcal{K}_{ABC} = 25 + 5\sqrt{5} \geq 25 + 5 \cdot 2{,}2 = 36$ (cm).

Jegyezd meg!

Egy derékszögű háromszögben:

- egy hegyesszög *szinusza* a vele szemben levő befogó és az átfogó hosszának hányadosa;
- egy hegyesszög *koszinusza* a mellette levő befogó és az átfogó hosszának hányadosa;
- egy hegyesszög *tangense* a vele szemben levő befogó és a mellette levő befogó hosszának hányadosa;
- egy hegyesszög *kotangense* a mellette levő befogó és a vele szemben levő befogó hosszának hányadosa.

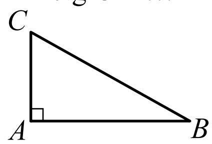
	α		
	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\text{tg}\,\alpha$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Gyakorlatok és feladatok

1. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90°$. Másoljátok le, majd egészítsétek ki a megfelelő hányadosokkal:

$\sin B = \dots$ $\qquad$ $\operatorname{tg} B = \dots$

$\cos C = \dots$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} C = \dots$



2. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90°$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Jelöljétek a B szög mértékét $u°$-kal és a C szög mértékét $v°$-kal. Másoljátok le és töltsétek ki az alábbi táblázatot!:

	$u°$	$v°$
sin		
cos		
tg		
ctg		

3. A DEF háromszögben $D\sphericalangle = 90°$, $DE = 8$ cm és $\sin F = 0{,}8$. Számítsátok ki a háromszög kerületét!

4. Egy derékszögű háromszög hegyesszögének mértéke $u°$.

a) Ha $\sin u° = \dfrac{12}{13}$, mennyivel egyenlő $\cos u°$.

b) Ha $\cos u° = \dfrac{1}{6}$, mennyivel egyenlő $\operatorname{tg} u°$.

c) Ha $\operatorname{tg} u° = \dfrac{3}{4}$, mennyivel egyenlő $\sin u°$.

5. Számítsátok ki:

a) $\sin 30° \cdot \operatorname{tg} 45° + \cos 30° \cdot \operatorname{ctg} 60°$

b) $\sin 60° \cdot \cos 60° + \sin 30° \cdot \cos 30° -$
$- \sin 45° \cdot \cos 45°$

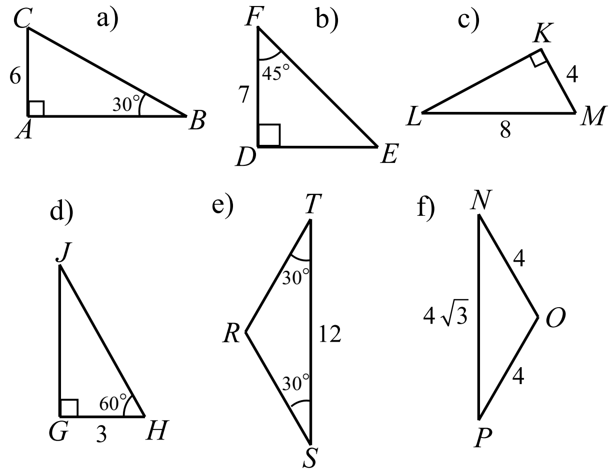
6. Az ABC derékszögű háromszögben $B\sphericalangle = 90°$, $BD \perp AC$, $D \in AC$, $AD + DC = 10$ cm és $3 \cdot AD = 2 \cdot CD$.

a) Szerkesszetek ábrát a feladat adatainak megfelelően!

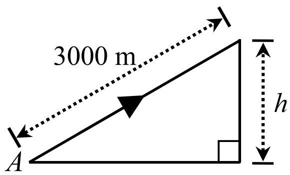
b) Számítsátok ki $\sin C\sphericalangle$, $\operatorname{tg} A$ és $\cos CBD\sphericalangle$ értékét!

7. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90°$ és $D = pr_{BC}A$. Ha $AD = 8$ cm és $BD = 4$ cm, számítsátok ki $\sin B + \sin C$ értékét!

8. Határozzátok meg az az alábbi háromszögek oldalainak hosszát és szögeinek mértékét!



9. Egy repülőgép az A pontból, 30°-os szögben emelkedik fel a kifutópályáról, és tovább egyenes vonalban halad. Mekkora h magasságban lesz 3000 m repülés után?



10. Számítsátok ki az MNP háromszög kerületét és területét, ha $M\sphericalangle = 90°$, $MN = 18$ cm és $\operatorname{tg} P = \dfrac{3}{4}$!

11. Az $ABCD$ trapézban $A\sphericalangle = 90°$, $B\sphericalangle = 60°$, $BC = 8$ cm, $CD = 12$ cm.

a) Számítsátok ki a trapéz magasságát!

b) Igazoljátok, hogy $AC \perp BC$.

12. A DEF egyenlő szárú háromszögben $DE = DF = 18$ cm és $EF = 24$ cm. Számítsátok ki a DEF szög szinuszát!

7.4. A derékszögű háromszög megoldása. Alkalmazások

1.ℓ. A derékszögű háromszög megoldása

Emlékeztető

1) Egy derékszögű háromszög elemei: egy átfogó, két befogó, egy derékszög és két hegyesszög.

2) Ha egy sokszög minden oldala és minden szöge kongruens, szabályos sokszögnek nevezzük.

3) Minden szabályos sokszög körbe írható.

Fedezzük fel, értsük meg!

Megoldani egy derékszögű háromszöget azt jelenti, hogy meghatározzuk a háromszög minden elemét: mindhárom oldalát és mindhárom szögét.
Egy logikai és számítási eljárás-sorozatról van szó, célunk a feladatot minél kevesebb ismert adatból megoldani.

Példák:

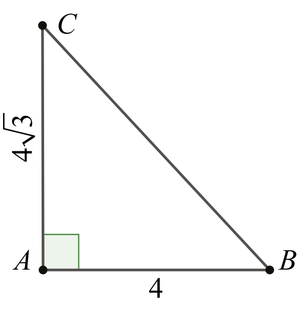
1) Ha ismerjük a derékszögű háromszög két oldalát, Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítható a harmadik oldal. Ezután szögfüggvények segítségével meghatározható a két hegyesszög mértéke.
2) Ha csak egy hegyesszöget ismerünk, akkor a másik hegyesszög ennek pótszöge, tehát az is kiszámítható.
Az oldalak meghatározásához viszont nem áll rendelkezésünkre elegendő adat.

Elemezzünk két esetet, melyben meg lehet oldani a derékszögű háromszöget:

E_1: Adott a derékszögű háromszög két oldalának hossza.

1) Pitagorasz-tétel segítségével kiszámítható a harmadik oldal hossza.

2) Kiszámítjuk egyik hegyesszög szinuszát, mint a vele szemben fekvő befogó és az átfogó arányát. Ha az így kapott érték egyike azoknak, amelyeket a 30°-os, 45°-os és 60°-os szögekre ismerünk, akkor azonosítható a hegyesszög mértéke. Ellenkező esetben, a hegyesszög közelítő értékét szögfüggvény-táblázat vagy számoló- illetve számítógép segítségével határozhatjuk meg. A másik hegyesszög mértéke könnyen kiszámítható, mint az elsőnek pótszöge.



1. alkalmazás. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, $AB = 4$ cm, $AC = 4\sqrt{3}$ cm.
Határozzuk meg a BC átfogó hosszát és a hegyesszögek mértékét.
Megoldás. A BC átfogót Pitagorasz-tétel alapján számítjuk ki:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}.$$

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ez egy ismert érték, tehát $B\sphericalangle = 60^\circ$, $C\sphericalangle = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Megjegyzés. Az előbbi alkalmazásban adott volt a két befogó. Hasonlóan járunk el akkor is, ha az egyik befogó és az átfogó adott.

Feladat a portfólióba

Oldjátok meg az MNP háromszöget, ha $M\sphericalangle = 90^\circ$, $MN = 12$ cm és $NP = 12\sqrt{2}$ cm.

E_2: Adott a derékszögű háromszög egyik oldalának hossza és két oldalának aránya (az egyik hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense vagy kotangense)

Két esetet különböztetünk meg:

a) Az adott hosszúságú oldal az adott arány egyik tagja (számlálója vagy nevezője). Kiszámítjuk az adott arány másik tagját, ez nem más, mint a háromszög valamely oldalának hossza, majd a fentebb tárgyalt E_1-es esetben ismertetett eljárást folytatva kiszámítjuk a háromszög összes elemét.

b) Az adott hosszúságú oldal nem szerepel az adott arányban.

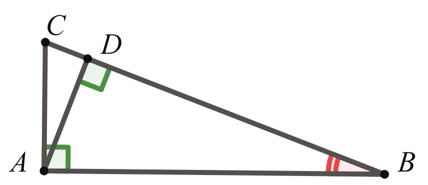
Két alesetet különböztetünk meg:

b_1) Az adott arányból és az adott oldalból kiindulva, a Pitagorasz-tétel alapján kiszámítható a másik két oldal hossza. Tovább a fent tárgyalt E_1 esetre vonatkozó eljárást alkalmazzuk.

b_2) Az adott arányból kiszámítunk egy újabb arányt, amelyben szerepel az adott oldal, majd az E_1-ben leírt módon folytatjuk a megoldását.

2. alkalmazás.

Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, $\text{ctg}ABC\sphericalangle = 3$, $BC = 5$ cm és AD az átfogóhoz tartozó magasságvonal. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:



a) $E_1 = AB \cdot AC \cdot \dfrac{1}{AD}$

b) $E_2 = AB \cdot \sin C + AC \cdot \sin B$.

Megoldás. a) Meghatározzuk az AB, AC és AD szakasz hosszát.

Az ABC derékszögű háromszögben $\text{ctg}B = \dfrac{AB}{AC} = 3$. Következik, hogy $\dfrac{AB^2}{AC^2} = 9$, $\dfrac{AB^2}{AB^2 + AC^2} = \dfrac{9}{10}$

és a Pitagorasz-tétel alapján $\dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2}{25} = \dfrac{9}{10}$. A háromszög oldalai: $AB = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ (cm),

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ (cm), magassága $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{2}$ (cm).

Behelyettesítve: $E_1 = \dfrac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = 5$.

b) Az E_2 kifejezést megkapjuk, ha behelyettesítjük a $\sin C$-nek és $\sin B$-nek megfelelő hányadosokat:

$$AB \cdot \sin C + AC \cdot \sin B = AB \cdot \frac{AB}{BC} + AC \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC} = \frac{BC^2}{BC} = BC = 5 \text{ (cm)}.$$

Megjegyzés. A hegyesszögek pontos mértékét nem tudjuk meghatározni, mert a ctg $ABC\sphericalangle = 3$ nem szerepel az általunk ismert értékek között. Szögfüggvény-táblázat, zsebszámológép vagy számítógép segítségével meghatározható a szög közelítő értéke: 18°26’.

2.ℓ. A derékszögű háromszög alkalmazása a szabályos sokszög elemeinek kiszámítására és más gyakorlati helyzetekben

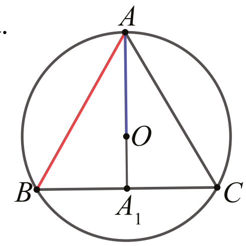
Alkalmazás

A. Számítások az egyenlő oldalú háromszögben, a négyzetben és a szabályos hatszögben (oldal, apotéma, terület, kerület)

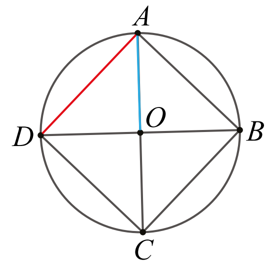
A szabályos sokszögekkel kapcsolatban rendszerint a következőkre utalunk: *a sokszög oldala, a sokszög szöge, a sokszög köré írt kör sugara, a sokszög átlói, a sokszög apotémája, a kerülete és a területe*.
Számos feladatban adott a szabályos sokszög egy vagy több eleme, és kiszámítjuk a többit.
Ilyen értelemben a 3, 4 és 6-oldalú szabályos sokszöget fogjuk tanulmányozni.
L-lel jelöljük az n-oldalú szabályos sokszög oldalát, és R-rel a körülírt kör sugarát, $n \in \{3, 4, 6\}$ esetben.
A következőkben levezetünk néhány hasznos összefüggést.

A_1. A szabályos sokszög oldalának hossza és a köré írt kör sugara közötti összefüggés

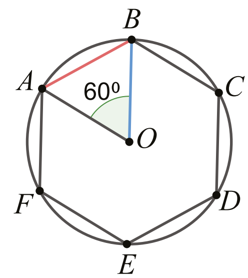
- Az ABC egyenlő oldalú háromszögben a nevezetes vonalak egybeesnek és a háromszög köré írható kör O középpontjában metszik egymást. Az O pont az AA_1 oldalfelezőt $\frac{OA_1}{OA} = \frac{1}{2}$ arányban osztja.
Az ABA_1 derékszögű háromszögben $AB = L$, és $BA_1 = \frac{L}{2}$.
Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $AA_1 = \sqrt{AB^2 - BA_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}L$.
AO a körülírt kör sugara: $R = AO = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{L}{\sqrt{3}}$, tehát $L = R\sqrt{3}$.



- Az $ABCD$ négyzet az O középpontú körbe van írva. A négyzet átlói egyben a kör átmérői, tehát az O pont az átlók metszéspontja és felezi az átlókat. Az ADB derékszögű háromszögben $AB = L$. A Pitagorasz-tételt szerint $DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = L\sqrt{2}$.
OA, OB, OC, OD a körülírt kör sugarai: $R = OB = \frac{1}{2}BD = \frac{L}{\sqrt{2}}$. tehát $L = R\sqrt{2}$.



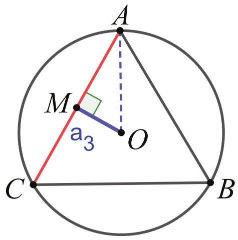
- Az $ABCDEF$ szabályos hatszög az O középpontú körbe van írva.
Az egyik oldalhoz tartozó középponti szög mértéke $360° : 6 = 60°$.
Az AOB egyenlő oldalú háromszögben $AB = L$, és a kör sugara OA. Tehát $L = R$.
- Az n oldalú szabályos sokszög n darab, egymással kongruens, egyenlő szárú háromszögre bontható. A kör O középpontja közös csúcsa mindegyik háromszögnek, a háromszögek alapja a szabályos sokszög egy-egy oldala, a háromszögek szárai a kör sugarai. A háromszögek közös O csúcsához tartozó magasságvonalai kongruensek egymással, tehát a körülírt kör középpontja egyenlő távolságra található a szabályos sokszög minden oldalától.

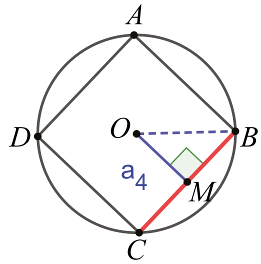


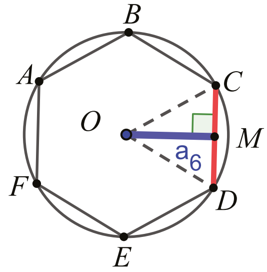
1. értelmezés. A szabályos sokszög köré írt kör középpontjától a sokszög oldaláig mért távolságot a szabályos sokszög **apotémájának** nevezzük.

Jelölés: egy n oldalú szabályos sokszög apotémáját a_n-nel jelöljük.

A$_2$. Az apotéma és a körülírható kör közötti összefüggés







$d(O, AC) = a_3$	$d(O, BC) = a_4$	$d(O, CD) = a_6$
Az AOM háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:	A BOM háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:	A COM háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:
$a_3 = OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$	$a_4 = OM = \sqrt{BO^2 - BM^2}$	$a_6 = OM = \sqrt{CO^2 - CM^2}$
$a_3 = \dfrac{L\sqrt{3}}{6} = \dfrac{R}{2}$	$a_4 = \dfrac{L}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$a_6 = \dfrac{L\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

A$_3$. A szabályos sokszögek szögei

Az alábbi összefüggések is az előző alkalmazás ábráira vonatkoznak:

	ABC egyenlő oldalú háromszög	*ABCD* négyzet	*ABCDEF* szabályos hatszög
Két szomszédos oldal által közrezárt szög	$ABC\sphericalangle = 60^\circ$	$ABC\sphericalangle = 90^\circ$	$ABC\sphericalangle = 120^\circ$
Egy oldalhoz tartozó középponti szög	$AOB\sphericalangle = 120^\circ$	$AOB\sphericalangle = 90^\circ$	$AOB\sphericalangle = 60^\circ$

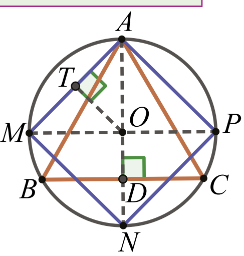
A$_4$. A szabályos sokszög kerülete és területe

Az n-oldalú szabályos sokszög kerületét az oldalak hosszának összegeként értelmezzük: $\mathcal{K}_n = n \cdot L$.

$\mathcal{K}_3 = 3 \cdot L$	$\mathcal{K}_4 = 4 \cdot L$	$\mathcal{K}_6 = 6 \cdot L$

A sokszöglapot n darab kongruens, egyenlő szárú háromszögre bontjuk, ezek egyik csúcsa közös a sokszög köré írt kör középpontjával, és a háromszögek alapja a sokszög egy-egy oldala. A háromszögek magassága egyenlő sokszög apotémájával. Következik, hogy az n oldalú szabályos sokszög területe: $\mathcal{T}_n = n \cdot \dfrac{L \cdot a_n}{2}$

$\mathcal{T}_3 = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$	$\mathcal{T}_4 = L^2$	$\mathcal{T}_6 = 6 \cdot \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$



1. alkalmazás. Egy egyenlő oldalú háromszög és egy négyzet csúcsai ugyanazon a körön helyezkednek el.

a) Ha az egyenlő oldalú háromszög oldala 12 cm, számítsuk ki a négyzet apotémáját.

b) Ha a négyzet területe 72 cm^2, határozzuk meg a háromszög apotémáját.

Megoldás: Jelöljük ABC-vel a háromszöget és $AMNP$-vel a négyzetet.

a) Legyen AD az ABC háromszög magassága, $AB = 12$ cm és $ADB\sphericalangle = 90^\circ$. Az ABD háromszögben: $\sin(\sphericalangle ABD) = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AD}{12} \Rightarrow AD = 6\sqrt{3}$ cm. Mivel $O \in AD$, következik, hogy $AO = R = \dfrac{2}{3} \cdot AD = 4\sqrt{3}$ (cm). Az AOM háromszögben $AOM\sphericalangle = 90^\circ$, $AO = OM = 4\sqrt{3}$ (cm), $MAO\sphericalangle = 45^\circ$, és AM a négyzet oldala. Legyen $OT \perp AM$, $T \in AM$. Következik, hogy $\sphericalangle ATO = 90^\circ$ és OT a négyzet apotémája.

Az ATO háromszögben $\sin(TAO\sphericalangle) = \frac{OT}{AO} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OT}{4\sqrt{3}} \Rightarrow OT = a_4 = 2\sqrt{6}$ (cm).

b) $\mathcal{T}_{AMNP} = 72$ cm², tehát $AM^2 = 72$ és $AM = 6\sqrt{2}$ cm. Az AMN egyenlő szárú, derékszögű háromszögben $AM = MN = 6\sqrt{2}$ (cm), ebből következik, hogy $AN = AM\sqrt{2} = 12$ (cm). Mivel AN a kör átmérője, $R = AO = 6$ (cm).

Az ABC egyenlő oldalú háromszögben AD magasság, $O \in AD$ és $OD = a_3 = \frac{R}{2} = 3$ (cm).

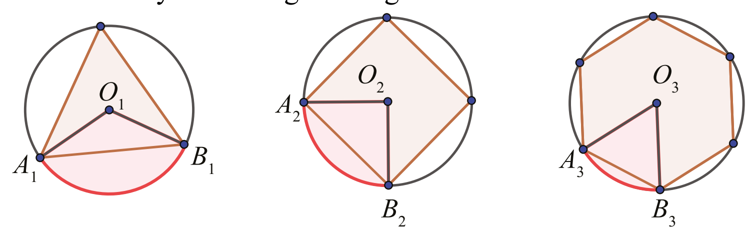
2. alkalmazás. Az A és B pontok a $\mathcal{C}(O,R)$, körön helyezkednek el, $\overset{\frown}{AB} = 120°$ és $AB = 24\sqrt{3}$ cm. Határozzuk meg a kör sugarát, és a $\mathcal{C}(O,R)$ körbe írt szabályos hatszög apotémáját.

Megoldás: Ha az $\overset{\frown}{AB}$ kis körív mértéke 120°, akkor AB az egyenlő oldalú háromszög oldala (lásd A_3).

Tehát $AB = L = R\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. Következik, hogy $R = 24$, és $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

3. alkalmazás. Adott egy 10 cm átmérőjű körlemez. Mely esetben lesz az anyagveszteség minimális: ha 3, 4 vagy 6 oldalú szabályos sokszöget vágunk ki belőle? Fejezzük ki a veszteséget százalékos arányban!

Megoldás: Vizsgáljuk a három szabályos sokszögnek megfelelő ábrát!



A veszteség területe egyenlő körlemez területe és a szabályos sokszög területe közötti különbséggel.

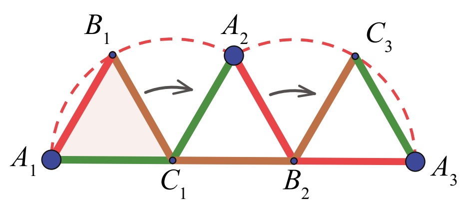
	A veszteség területe	Százalék
Háromszög	$\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{\left(4\cdot\pi - 3\sqrt{3}\right)R^2}{4}$	$\frac{4\cdot\pi - 3\sqrt{3}}{4\cdot\pi}\cdot 100\% \approx 58{,}65\%$
Négyzet	$\pi R^2 - 2\cdot R^2 = (\pi - 2)R^2$	$\frac{\pi - 2}{\pi}\cdot 100\% \approx 36{,}3\%$
Hatszög	$\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} = \frac{\left(2\cdot\pi - 3\sqrt{3}\right)R^2}{2}$	$\frac{2\cdot\pi - 3\sqrt{3}}{2\cdot\pi}\cdot 100\% \approx 17{,}30\%$

A százalékos arányban kifejezett veszteségből látható, hogy az a hatszög esetében a legkisebb.

B. Gyakorlati alkalmazások: távolságok kiszámítása metrikus összefüggések segítségével

1. alkalmazás.

Az ABC egyenlő oldalú háromszög oldala10 cm. A háromszöget csúsztatás nélkül gördítjük az AB egyenes mentén, (az ábrának megfelelően). Számítsuk ki az A pont által megtett körívek hosszát. Rajzoljátok le a füzetbe az A pont pályáját, amíg az ismét az AB egyenesre nem ér!



Megoldás. $A_1B_1C_1$ a háromszög kiindulási helyzete.

Első lépés: a háromszög a C_1 körül fordul el 120°-os szöggel. Az A csúcs az $A_1B_1A_2$ ívet írja le, ennek hossza a 10 cm sugarú kör kerületének egyharmada (mivel 120°-os középponti szögnek felel meg, ami 360° egyharmada). Az A pont A_1-ből az A_2-be került.

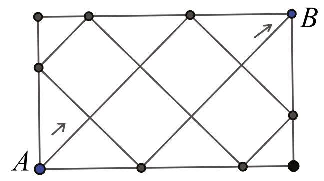
Második lépés: a háromszög tovább gördül a B_2 körül újabb 120°-kal, miközben az A csúcs az első lépésben leírt körívvel kongruens $A_2C_2A_3$ körívet írja le.

Végeredményben a háromszög A csúcsa által megtett ívek hossza $2\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot R}{3} = \frac{4\cdot\pi\cdot R}{3} = \frac{40\cdot\pi}{3}$.

Feladat a portfólióba

Fogalmazzatok hasonló feladatot négyzetre és szabályos hatszögre vonatkozóan! Oldjátok meg őket!

2. alkalmazás



Egy téglalap alakú biliárdasztal méreteinek aránya 3 : 5. Mutassuk ki, hogy ha az asztal egyik sarkából ellökünk egy golyót, az asztal oldalaihoz (éleihez) képest 45°-os szögben, és a golyó az asztal éleivel mindig tökéletesen rugalmasan ütközik, akkor hat ütközés után pontosan a szemben fekvő sarokba érkezik. Számítsuk ki a golyóút hosszának az asztal kerületéhez viszonyított arányát.

Megoldás: A téglalap méreteit $3L$-lel és $5L$-lel jelölve, kerülete $16L$. A golyó egy sor egyenlő szárú, derékszögű háromszög átfogója mentén halad. Az átfogók hossza Pitagorasz-tétellel számítható ki, rendre: $3\sqrt{2}L$, $2\sqrt{2}L$, $\sqrt{2}L$, $3\sqrt{2}L$, $\sqrt{2}L$, $2\sqrt{2}L$, $3\sqrt{2}L$. Összeadva megkapjuk a golyó által megtett út hosszát $15\sqrt{2}\,L$.

A golyóút hosszának az asztal kerületéhez viszonyított aránya $\dfrac{15\sqrt{2}}{16}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$.
a) Ha $AB = 4$ cm és $B\sphericalangle = 60^\circ$, számítsátok ki a C szöget, az AC és a BC oldalt!
b) Ha $AC = 12$ cm és $\sin B = 0{,}6$, számítsátok ki AB-t, BC-t és tg B-t!
c) Ha $AB = 3\cdot AC$ és $BC = \sqrt{10}$ cm, számítsátok ki $\sin B$-t és az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!

2. Az ABC derékszögű háromszögben AD az átfogóhoz tartozó magasságvonal, $AD = 18$ cm és $\operatorname{tg} ACB\sphericalangle = 2$. Számítsátok ki AC-t, AB-t és $\sin ABC\sphericalangle$ értékét!

3. Az ABC derékszögű háromszögben $B\sphericalangle = 90^\circ$. Számítsátok ki a háromszög oldalainak hosszát, szögeinek mértékét és az átfogóhoz tartozó magasságot az alábbi esetekben:
a) $A\sphericalangle = C\sphericalangle$ és $AC = 12\sqrt{2}$ cm;
b) $AB = 8$ cm és $\operatorname{tg} C = \sqrt{3}$;
c) $BC = 2\sqrt{3}$ és $\mathcal{T}_{ABC\Delta} = 2\sqrt{3}$ cm².

4. Az $ABCD$ téglalapban M a CD oldal felezőpontja és N egy pont a BC oldalon, amelyre $DAM\sphericalangle = CMN\sphericalangle = u$.
a) Igazoljátok, hogy az AMN háromszög derékszögű!
b) Ha $u = 30^\circ$ és $AB = 2\sqrt{3}$ cm, számítsátok ki az AMN háromszög és a téglalap területének arányát!

5. A DEF háromszögben $D\sphericalangle = 45^\circ$, $E\sphericalangle = 60^\circ$ és $DF = 3\sqrt{2}$ cm.
a) Számítsátok ki a DE oldalhoz tartozó FM magasságot!
b) Számítsátok ki a FME háromszög kerületét!
c) Mutassátok ki, hogy a DE oldal hossza nagyobb, mint 4,7 cm!

6. Az ABC háromszögben $AB = 30$ cm, $BC = 24$ cm, $CA = 18$ cm és P az AB oldal felezőpontja. Mennyivel egyenlő $n = \sin ACP\sphericalangle + \sin BCP\sphericalangle$?

7. Az ABC háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, $C\sphericalangle = 15^\circ$ és AD a háromszög magassága.
a) Rajzoljátok meg az ABC háromszög AM oldalfelezőjét és határozzátok meg az ADM háromszög szögeinek mértékét!
b) Ha $BC = 4a$, fejezzétek ki az AM és MD szakasz hosszát a függvényében!
c) Igazoljátok, hogy $4\cdot AD^2 = AC\cdot AB$.

8. Az A, B, C pontok kollineárisak ebben a sorrendben, $AB = 2$ cm, $BC = 8$ cm és $DB \perp AC$, $DB = 4$ cm.
a) Mennyivel egyenlő $\sin ADB\sphericalangle + \sin BDC\sphericalangle$?
b) Számítsátok ki az ADC háromszög kerületét!

9. A TRI általános háromszögben $R\sphericalangle = 60^\circ$, $TR = 8$ cm, $RI = 12$ cm és $TA \perp RI$, $A \in RI$.
a) Határozzátok meg az AR és TI szakaszok hosszát!
b) A B pont az R pontnak az AI szakasz felezőpontja szerinti szimmetrikusa. Igazoljátok, hogy a BTR háromszög derékszögű!

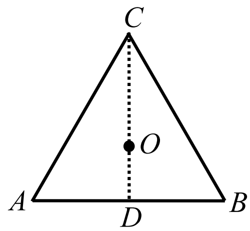
10. Az $ABCD$ rombuszban $AB = 24$ cm és $AC \cap BD = \{O\}$. Ha $\frac{AO}{BO} = \sqrt{3}$, számítsátok ki a rombusz átlóinak hosszát!

11. Az $ABEF$ derékszögű trapézban $AB \parallel EF$, $A\sphericalangle = 90^\circ$, $B\sphericalangle = 60^\circ$, $AB = 15$ cm és BD az $ABE\sphericalangle$ szögfelezője.

a) Számítsátok ki a trapéz kisalapjának hosszát!

b) Ha C a BF átló felezőpontja, számítsátok ki az ACE háromszög kerületét!

12. ABC egyenlő oldalú háromszög és O a háromszög köré írható kör középpontja. Nevezzétek meg azt a szakaszt, melynek a hossza:



a) a háromszög köré írható kör sugara;

b) a háromszög beírt körének sugara;

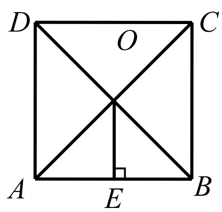
c) a háromszög apotémája!

13. Az alábbi táblázatban l, R, a, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{T}$ egy egyenlő oldalú háromszög oldalát, a háromszög köré írható kör sugarát, apotémáját, kerületét és területét jelöli (a méretek cm-ben, illetve cm^2-ben adottak).

	l	R	a	$\mathcal{K}$	$\mathcal{T}$
a)	18				
b)		$4\sqrt{3}$			
c)			$3\sqrt{3}$		
d)					$36\sqrt{3}$

Másoljátok le, végezzétek el a szükséges számításokat, és egészítsétek ki a táblázatot!

14. $ABCD$ négyzet és O az átlók metszéspontja. Nevezzétek meg azt a szakaszt, melynek a hossza:



a) a négyzet köré írható kör átmérője;

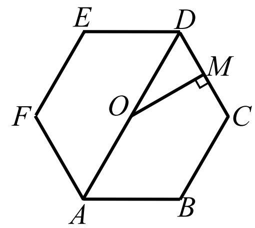
b) a négyzet beírt körének sugara;

c) a négyzet apotémája.

15. Az alábbi táblázatban l, R, a, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{T}$ egy négyzet oldalát, a négyzet köré írható kör sugarát, apotémáját, kerületét és területét jelöli (a méretek cm-ben, illetve cm^2-ben adottak). Másoljátok le, végezzétek el a szükséges számításokat, és egészítsétek ki a táblázatot!

	l	R	a	$\mathcal{K}$	$\mathcal{T}$
a)	8				
b)		$10\sqrt{2}$			
c)			5		
d)					3,24

16. $ABCDEF$ szabályos hatszög és O a hatszög köré írható kör középpontja. Nevezzétek meg azt a szakaszt melynek a hossza:



a) a hatszög köré írható kör sugara;

b) a hatszög beírt körének sugara;

c) a hatszög apotémája.

17. Az alábbi táblázatban l, R, a, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{T}$ egy szabályos hatszög oldalát, a hatszög köré írható kör sugarát, apotémáját, kerületét és területét jelöli (a méretek cm-ben, illetve cm^2-ben adottak).

	l	R	a	$\mathcal{K}$	$\mathcal{T}$
a)				36	
b)		3			
c)			$\sqrt{3}$		
d)					$144\sqrt{3}$

Másoljátok le, végezzétek el a szükséges számításokat, és egészítsétek ki a táblázatot!

18. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldala 24 cm. Számítsátok ki:

a) az $ACB\sphericalangle$ és $BDF\sphericalangle$ mértékét;

b) a hatszög köré írható kör sugarát;

c) az ADE háromszög kerületét;

d) az $ACDF$ négyszög területét.

19. Számítsátok ki egy egyenlő oldalú háromszög oldalának hosszát, ha a háromszög köré írható kör sugara és az apotémája közötti különbség 2 cm.

20. A $\mathcal{C}(O,\ R)$ kör sugara $R = \sqrt{11}$ cm. Írjatok a körbe egyenlő oldalú háromszöget, négyzetet és szabályos hatszöget, és jelöljétek az oldalaik hosszát l_3-mal, l_4-gyel illetve l_6-tal! Mennyivel egyenlő $l_3^{-2} + l_4^{-2} + l_6^{-2}$

Ismeretfelmérő

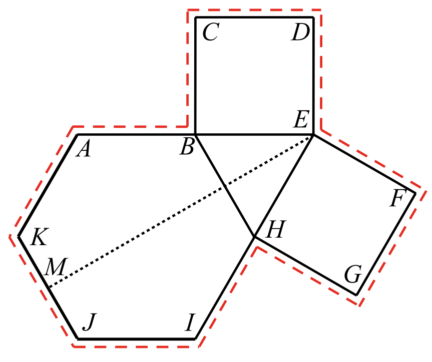
Hivatalból: 10 pont.

I. *Írd ki minden feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** Egy 200 cm^2 területű négyzet átlójának hossza: A. 30 cm B. 24 cm C. 20 cm D. 15 cm
5p	**2.** Egy egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 15 cm, az alaphoz tartozó magassága 9 cm. A háromszög alapja: A. 24 cm B. 20 cm C. 28 cm D. 32 cm
5p	**3.** Az ABC derékszögű háromszögben $A\sphericalangle = 90^\circ$, AD magasságvonal, $BD = 3$ cm, és $CD = 12$ cm. Az AD szakasz hossza: A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 6 cm
5p	**4.** Egy körcikk területe a teljes körlap területének nyolcadrésze. A körcikkhez tartozó középponti szög mértéke: A. 30° B. 45° C. 60° D. 15°
5p	**5.** Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm és $AC = 10$ cm. Az AB szakasz AC egyenesre eső vetülete: A. 3,2 cm B. 2,4 cm C. 6,3 cm D. 3,6 cm
5p	**6.** Az $ABCD$ egyenlő szárú trapézban $AB \parallel CD$, $AB = 17$ cm, $CD = 5$ cm és $\cos BAD\sphericalangle = 0{,}75$. A nem párhuzamos oldalak hossza: A. 8 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 16 cm
5p	**7.** Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság $6\sqrt{2}$ cm és az egyik befogó átfogóra eső vetülete 6 cm. A háromszög területe: A. $36\sqrt{2}$ B. $18\sqrt{2}$ C. $54\sqrt{2}$ D. $48\sqrt{2}$
5p	**8.** Egy egyenlő oldalú háromszög súlypontjának az oldalaktól mért távolsága 2 cm. A háromszög köré írt kör sugara: A. 2 cm B. 4 cm C. 1 cm D. 6 cm

II. *Írd le a feladatok részletes megoldását!*

	1. Az $ABCD$ téglalapban $AB < BC$, az átlók az O pontban metszik egymást, és $BO = 10$ cm. A P pont a D pontnak az AC átlóra eső vetülete és $AP - CP = 12$ cm.
5p	a) Készítsetek a feladat adatainak megfelelő ábrát!
10p	b) Számítsátok ki az AC és DP szakasz hosszát!
10p	c) Határozzátok meg az átlók által közrezárt szög tangensét!
	2. A mellékelt ábrán a pirossal húzott szaggatott vonal egy motorversenypálya nyomvonalát ábrázolja. A versenypálya egy telket vesz körül, mely az $ABHIJK$ szabályos hatszögből, a $BCDE$ és $EFGH$ négyzetekből és a BEH szabályos háromszögből áll. Tudjuk, hogy $AB = 450$ m, és a versenypálya hossza 20%-kal nagyobb, mint a telek kerülete.
10p	a) Számítsátok ki a versenypálya hosszát, km-ben kifejezve!
15p	b) A versenyek során, az EM szakasz mentén kihúzott sodronyon egy videókamera mozog és légi felvételeket közvetít. Igazoljátok, hogy $EM < 1{,}3$ km!



Összefoglaló feladatok

1. Végezzétek el az alábbi számításokat a valós számok halmazában:

a) $1+\sqrt{2+\sqrt{4}}$ b) $10+\sqrt{20+\sqrt{25}}$ c) $\sqrt{64+3\cdot\sqrt{144}}$

d) $\sqrt{306+2\cdot\sqrt{33+3\cdot\sqrt{256}}}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{64}+\frac{1}{3}\sqrt{81}+\frac{1}{4}\sqrt{144}$ f) $0,(7)\cdot\sqrt{36}-2,5\cdot\sqrt{400}$

g) $\sqrt{25^{n+1}:5^{2n}}$ h) $\sqrt{2^{2n+1}+3\cdot 4^{n}+4^{n+1}}$ i) $\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^{2}}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^{2}}$.

2. a) Igazoljátok, hogy $A=\dfrac{\sqrt{24,01}+\sqrt{37,21}}{\sqrt{4,84}+\sqrt{10,89}}$ természetes szám!

b) Igazoljátok, hogy $B=\sqrt{146,41}:\left(-\sqrt{1,21}\right)$ egész szám!

3. Soroljátok fel az $M=\left\{x\in\mathbb{N}\mid\sqrt{0,(4)}<x<\sqrt{1+4,(4)}\right\}$ halmaz elemeit!

4. Határozzátok meg azokat az n természetes számokat, amelyekre az alábbi számok racionálisak.

a) $\sqrt{\dfrac{16}{n}}$, $n<20$; b) $\sqrt{\dfrac{5-n}{n}}$; c) $\sqrt{\dfrac{100-n^{2}}{81}}$; d) $\sqrt{\dfrac{1}{50-n^{2}}}$.

5. Ábrázoljátok a valós számtengelyen a következő pontokat: $A(-2)$, $B(\sqrt{2})$, $C(4-\sqrt{2})$, $D(5)$. Határozzátok meg az AB és CD szakasz hosszát, és döntsétek el, melyik a nagyobb. Indokoljátok meg a választ!

6. Ha $a=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$ és $b=\left(\dfrac{2}{\sqrt{27}-\sqrt{3}}\right)^{-1}+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$ mennyivel egyenlő $c=\left|1+a\right|+\left|7-\sqrt{6}\cdot b\right|$?

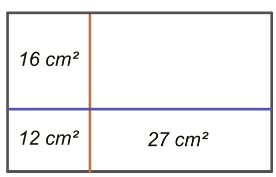
7. Számítsátok ki x és y mértani középarányosát, ha $\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^{2}}+\sqrt{\left(y-2\sqrt{2}\right)^{2}}\leq 0$.

8. Oldjátok meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} 2\cdot(x-2)+3\cdot\left(y-\dfrac{1}{3}\right)=2 \\ 5-\left(y+\dfrac{1}{3}\right)=4\cdot(x-1)-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-\dfrac{x-y+1}{3}=y \\ y-\dfrac{y-x+4}{2}=x-3y \end{cases}$.

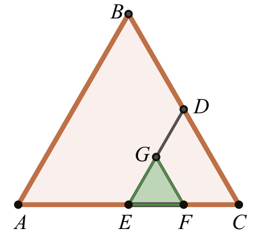
9. Egy papír-írószer kereskedésben eladtak egy nap 200 négyzethálós és vonalas füzetet vegyesen, 588 lej értékben. Ha egy négyzethálós füzet ára 3,60 lej, egy vonalas füzeté pedig 2,40 lej, hány négyzethálós füzetet adtak el aznap?

10. A mellékelt téglalapot az oldalaival párhuzamos egyenesek segítségével négy tartományra osztottuk, és néhány tartományba beírtuk a területét.
a) Hány téglalap látható az ábrán?
b) Mekkora a legnagyobb téglalap területe?



11. Az $EFGH$ négyzet csúcsai a $\mathcal{C}(O,r)$, körön vannak, és a kör középpontjának távolsága a négyzet oldalától $4\sqrt{2}$ cm. Számítsátok ki a kör sugarát, kerületét és a körlap területét.

12. Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, M egy pont a négyszög AC átlóján, $ME \parallel AB$, $E \in BC$ és $MF \parallel CD$, $F \in AD$.
a) Igazoljátok, hogy $AF \cdot BC = BE \cdot AD$!
b) Ha $\dfrac{AF}{FD} = \dfrac{CE}{EB}$, bizonyítsátok be, hogy M az AC átló középpontja!



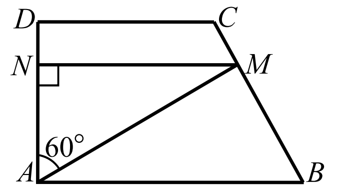
13. A mellékelt ábrán az ABC és EFG háromszögek egyenlő oldalúak, $T_{ABC} = 144\text{ cm}^2$, $AE \equiv EC$ és $DG \equiv GE$. Számítsátok ki a $CDGF$ négyszög területét!

14. Az $ABCD$ téglalap egy O középpontú körbe van írva és $AC = 2 \cdot BC$.
a) Bizonyítsátok be, hogy a téglalap átlói az O pontban metszik egymást!
b) Az AOD háromszög területe $4\sqrt{3}$ cm². Számítsátok ki a kör kerületét és a körlap területét!

15. Az ABC háromszögben $AB = AC = 12$ cm, $BC = 12\sqrt{2}$ cm és BM a háromszög oldalfelező egyenese. Határozzátok meg $\cos \sphericalangle AMB$ értékét!

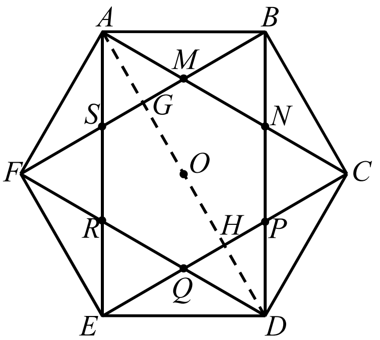
16. Egy egyenlő szárú trapéz nagyalapja 30 cm, középvonala 27 cm és magassága 4 cm.
a) Számítsátok ki a trapéz kerületét és átlóinak hosszát!
b) Számítsátok ki a nagyalap egyik végpontjának a távolságát a trapéz azon szárától, amelyiken nincs rajta.

17. Az $ABCD$ derékszögű trapézban $A\sphericalangle = D\sphericalangle = 90°$ és M a BC száron egy pont, amelyre érvényes, hogy $BM = 3 \cdot CM$.
a) Fejezzétek ki az M pont távolságát az AD egyenestől az alapok függvényében: $AB = x$ és $CD = y$, $x > y$.
b) Ha $AD = 22$ cm és $DAM\sphericalangle = 60°$, mennyivel egyenlő AM?



18. Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm és $A\sphericalangle = 60°$. Számítsátok ki a háromszög területét, kerületét és az A pontból húzott magasságvonal hosszát!

19. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldala 1 dm. Az AC, BD, CE, DF, EA és FB átlók páronként metszik egymást és meghatározzák az $MNPQRS$ hatszöget (lásd a melléket ábrát). Az AD egyenes a BF-et G-ben metszi, a CE-t pedig H-ban.
a) Bizonyítsátok be, hogy $MNPQRS$ szabályos hatszög!
b)Számítsátok ki az AG, GH és HD szakasz hosszát!
c) Határozzátok meg a két hatszög apotémájának arányát!



20. Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, M egy pont a négyszög AC átlóján, $ME \parallel AB$, $E \in BC$ és $MF \parallel CD$, $F \in AD$.

Igazoljátok, hogy $\dfrac{AF}{AD} + \dfrac{CE}{BC} = 1$.

21. Az $ABCD$ téglalap CD oldalán felvesszük az E és F pontot úgy, hogy
$DE = \dfrac{CD}{4}$ és $CF = \dfrac{CD}{3}$.
Ha $AE \cap BF = \{M\}$ és $MT \perp CD$, $T \in CD$, határozzátok meg az $\dfrac{ET}{TF}$ arány értékét!

Év végi felmérők és megoldások

T1 Év végi felmérő 1

Hivatalból: 10 pont

I. *Másold le az alábbi kijelentéseket! Az igaz állítások mellé írj az üres négyzetbe I jelt, a hamisak mellé pedig H jelt!*

5p	**1.** A $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$ kifejezés értéke $\sqrt{5}$.
5p	**2.** Az $(x+3)^2=25$ kifejezés értéke -4.
5p	**3.** Ha $x>0$, $y<0$ és $x^2=5$, $y^2=20$, akkor $\frac{1}{2}\cdot x\cdot y=-5$.
5p	**4.** Ha egy trapéz alapjainak hossza 6 cm illetve 14 cm, akkor a középvonalának hossza 9 cm.
5p	**5.** Egy négyzet területe 64 cm². A négyzet kerületét 32 cm-rel növelve, a területe 256 cm² lesz.
5p	**6.** Az $A(1, 3)$ és $B(5, 0)$ pontok közötti távolság 10 (m.e.).

II. Az ABC derékszögű háromszögben $BAC\sphericalangle=90°$, $AB=24$ cm és $\sin C=\frac{4}{5}$, továbbá AD és AM az átfogóhoz tartozó magasságvonal illetve oldalfelező.
Társítsd az A oszlopbeli követelmény sorszámát a B oszlopbeli helyes válasszal!

	A	*B*
5p	**1.** $BC=$	**a.** 18 cm
5p	**2.** $AC=$	**b.** 14,4 cm
5p	**3.** $AD=$	**c.** 4,4 cm **d.** 12 cm
5p	**4.** $DM=$	**e.** 30 cm **f.** 14,2 cm

III. *Írd le az alábbi feladatok részletes megoldását!*

	1. Adott: $a=\sqrt{6}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$.
10p	a) Végezd el a számításokat és állapítsd meg, hogy melyik igaz: $a\in\mathbb{Q}$ vagy $a\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$?
10p	b) Hasonlítsd össze az a számot a $b=\left|\left(-\frac{5}{6}\right)^{-1}\right|$ számmal!
	2. Egy téglalap alakú kartonlemez méretei 20 cm illetve 30 cm.
10p	a) Számítsd ki a téglalap átlójának hosszát!
10p	b) Határozd meg a minimális számú egyforma négyzetlapot, amelyre a kartonlemez felbontható úgy, hogy a négyzetek oldalának hossza centiméterben kifejezve egész szám legyen!

T2 Év végi felmérő 2

Hivatalból: 10 pont

I. *Írd ki minden feladat esetében az egyetlen helyes válasz betűjelét!*

5p	**1.** Adott az $A=\left\{0,(8);\sqrt{0,(1)};\sqrt{3};\frac{\sqrt{25}}{5};4,(123)\right\}$ halmaz. Az $A\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ halmaz elemeinek száma: A. 2 B. 1 C. 3 D. 4
5p	**2.** Kiszámítva a $\left(2\sqrt{10}+\sqrt{2}\right):\sqrt{2}-\frac{10}{\sqrt{5}}$ kifejezés értékét, az eredmény: A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\sqrt{5}$
5p	**3.** Ha $n=-2\sqrt{7}$ és $p=-4\sqrt{2}$ akkor: A. $n>p$ B. $n=p$ C. $n=-p$ D. $n<p$
5p	**4.** Egy derékszögű háromszögben a befogók egyenesen arányosak 8-cal és 15-tel, az átfogó hossza pedig 17 cm. A háromszög kerülete: A. 60 cm B. 50 cm C. 40 cm D. 30 cm
5p	**5.** Egy egyenlő oldalú háromszög apotémája $2\sqrt{3}$ cm. A háromszög oldalának hossza: A. 8 cm B. 12 cm C. 15 cm D. 6 cm
5p	**6.** A $\mathcal{C}(O,r)$ körön az $\overset{\frown}{AB}$ kis körív és nagy körív mértékének aránya $\frac{1}{7}$. Az $AOB\sphericalangle$ mértéke: A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
5p	**7.** Az $\begin{cases} x+y=11 \\ -x+11y=1 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása: A. $M=\{(1;10)\}$ B. $M=\{(10;1)\}$ C. $M=\{(-1;10)\}$ D. $M=\{(1;-10)\}$
5p	**8.** A $C(O,r)$ kör sugara $r=5$ cm, AB és CD párhuzamos húrok, $AB=8$ cm, $CD=2\sqrt{21}$ cm. Az AB és CD egyenesek közötti távolság: A. 4 cm B. 5 cm C. 6 cm D. 8 cm

II. *Írd le az alábbi feladatok részletes megoldását!*

20p	**1.** Az x, y és z természetes számok teljesítik a $\sqrt{x+2}=3$ és $\sqrt{y\cdot(z+3)}=2$ egyenlőséget. Számítsátok ki x, y, z és $\sqrt{x+y+z}$ értékét!
	2. Az $ABCD$ derékszögű trapézban $A\sphericalangle=D\sphericalangle=90°$, a nagyalap $AB=20$ cm és a középvonal $MN=14$ cm, $M\in AD$, $N\in BC$. Tudjuk, hogy $CN=10$ cm. Számítsátok ki:
10p	a) a) a trapéz kisalapjának hosszát;
10p	b) b) a trapéz területét;
10p	c) a $BAC\sphericalangle$ tangensét!

1. VALÓS SZÁMOK HALMAZA

1.1. Természetes szám négyzetének négyzetgyöke. Pozitív racionális szám négyzetgyökének közelítése

I. 1 C; **2.** D; **3.** C; **4.** D; **5.** C; **6.** C; **7.** B; **8.** D;
II. 1. a) –8; b) 4; c) 0,(1). **2.** $a = 2$, $b = 0{,}5$.
3. 271 m.

1.3 Tényezők kiemelése a gyökjel alól. Tényezők bevitele gyökjel alá

I. 1. I. **2.** H. **3.** I. **4.** H. **II. 1.** D. **2.** B. **3.** A. **4.** C. **5.** A. **6.** A. **7.** D. **III.** 1 – b; 2 – a; 3 – c; 4 – e; 5 – d; 6 – f. **IV.** $B = \{1, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{21}, 2\sqrt{7}, 6, \sqrt{45}\}$.

1.4 Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítés segítségével. A számok összehasonlítása és rendezése. Valós szám abszolút értéke

I. 1. C. **2.** A. **3.** A; D. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** D.
II. a) negatív; b) pozitív.
III. 1. 10. **2.** a) $\sqrt{10}$; b) 2.

1.5 Műveletek valós számokkal. Az $a\sqrt{b}$ alakú nevezők gyöktelenítése

I. 1. B. **2.** A. **3.** C. **4. D**. **5.** A. **6.** C. **7. C**. **8.** D. **II. 1.** a) –3; b) $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, majd összehasonlítjuk a számok négyzetét.
2. $E(\sqrt{5}) = -10$, $E(-\sqrt{5}) = 10$, nulla.

1.6 *n* valós szám súlyozott számtani közepe, $n \geq 2$. Két pozitív valós szám mértani közepe

I. 1. C; **2.** A; **3.** B; **4.** B; **5.** C; **6.** C; **7.** D; **8.** A.
II. 1. a) $a = 1$, $b = 3$; b) $a = 1$, $b = 9$; c) 3,24.
2. a) $x = 2\sqrt{3}$, $y = 6\sqrt{3}$; b) <.

1.7 $x^2 = a$, alakú egyenletek, ahol $a \in \mathbb{R}$.

I. 1. C; **2.** B; **3.** D; **4.** A; **5.** B; **6.** C.
II. 1. $(x + 25)^2 = 5625$, $x = 50$. **2.** a) 27 m; b) H = 81 m, sz = 27 m; c) 216 m. **3.** $x \in \mathbb{N}$ a poszter oldala, $x^2 > 6 \cdot 2{,}4 : 4 = 3{,}6$ és $x < 2{,}4$. Eredmény: $x = 2$.

2. EGYENLETEK ÉS EGYENLETRENDSZEREK

2.2 $a \cdot x + b = 0$ alakú egyenletek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Egyenlet megoldáshalmaza. Ekvivalens egyenletek

I. 1. D; **2.** A; **3.** D; **4.** C; **5.** A; **6.** B.
II. 1. a) 7; b) –4; c) –4; d) b és c ekvivalensek.
2. a) $u(3a + 19) \in \{0, 5\} \Rightarrow u(a) \in \{7, 2\} \Rightarrow u(2a + 91) = 5$; b) $a = 67$.

2.3 Két kétismeretlenes lineáris egyenletből álló egyenletrendszer. A helyettesítés és a kiküszöbölés módszere

I. 1. C; **2.** B; **3.** C; **4.** A; **5.** A; **6.** B.
II. 1. $x = -3 \Rightarrow y = -1$; $y = -1 \Rightarrow x = -3$;
$x = 0{,}6 \Rightarrow y = 1{,}7$; $y = 1{,}4 \Rightarrow x = 0{,}2$;
$x = 1 + 4\sqrt{2} \Rightarrow y = 2 + 3\sqrt{2}$;
2. $x = 3$, $y = -2$. **3.** $a = 5$, $b = 24$.

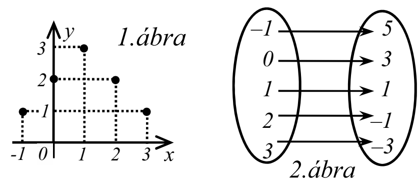
2.4 Egyenletekkel vagy lineáris egyenletrendszerekkel megoldható feladatok

I. 1. B; **2.** A; **3.** D; **4.** C. **II. 1.** $\frac{x}{y}$ a tört kezdeti értéke értéke, $x = y - 4$, $2x = y + 1$, $x = 5$, $y = 9$.
2. $m + \frac{a}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5a}{12}$, $a + \frac{m}{10} = \frac{9m}{10} + 96$, $a = 120$, $b = 30$. **3.** $x + y = \frac{5}{6}$, $x - y = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$.

3. AZ ADATSZERVEZÉS ELEMEI

3.2 Függvényi kapcsolat

I. 1. B; **2.** A; **3.** D; **4.** C; **5.** C; **6.** A; **7.** C; **8.** D.
II. 1. lásd az 1. ábrát; **2.** 5 cm → 25 km; 20 km → 4 cm; 7,5 cm → 37,5 km; 350 km → 70 cm; 12 cm → 60 km. **3.** c) lásd a 3. ábrát.
4. a) $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$; b) $y = 5 - x$



1.ábra 2.ábra

4. NÉGYSZÖG

4.2. A paralelogramma tulajdonságai. Alkalmazások a háromszögek geometriájában

I. 1. C; **2.** D; **3.** A; **4.** B; **5.** C; **6.** D; **7.** B; **8.** C.
II.1. a) $ABO\sphericalangle \equiv ODC\sphericalangle$; b) $ABC\Delta \equiv ADC\Delta$ (O.O.O.)

2. $MBC\sphericalangle + MCB\sphericalangle = 90°$. **3.** $IBC\sphericalangle \equiv BCL\sphericalangle \Rightarrow IB \parallel LC$; $ICB\sphericalangle \equiv CBL\sphericalangle \Rightarrow IC \parallel BL$.
4. a) $BAC\sphericalangle = C\sphericalangle = 60°$, $ABC\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 120°$; b) $AD = 8$ cm, $\mathcal{K} = 24$ cm; c) $CE = 8$ cm, $CF = 24$ cm.

4.3 Sajátos paralelogrammák: téglalap, rombusz, négyzet

I. 1. B; **2.** C; **3.** D; **4.** B; **5.** B; **6.** A; **7.** D; **8.** C.
II.1. a) $DBC\sphericalangle = 45°$, $GBF\sphericalangle = 45°$;
b) $CF \perp BF$, $DB \perp BF \Rightarrow BD \parallel CF$;
c) $MO \parallel BF$, $AO \parallel BF$.
2. $DMA\sphericalangle = 120° = EMF\sphericalangle$, $BNC\sphericalangle = 120° = ENF\sphericalangle$, $E\sphericalangle = F\sphericalangle = 60°$, $DM = MA$, $DF = AE \Rightarrow MF = AE$. **3.** $8x + 14y = 30$, $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2, y = 1, h \geq 7$ (m).

4.4 A trapéz: osztályozás, tulajdonságok. A trapéz középvonala

I. 1. A; **2.** C; **3.** B; **4.** C. **II. 1.** b; **2.** c; **3.** a; **4.** d. **III. 1.** a) $BCE\sphericalangle = 30° \Rightarrow BEC\sphericalangle = 60°$; $AED\sphericalangle = EBF\sphericalangle = 60°$; b) $BF = EF$ és $BF = FC$. **2.** a) MN középvonal $NP = MN \Rightarrow MP \parallel AB$, $MP = AB$; b) DN középvonal az $AMP\Delta$; $DN \parallel AM$, $DN < AM$, $AMP\sphericalangle = 90°$;
c) $BMCP$ paralelogramma.

4.5 Kerületek és területek

I. 1. C; **2.** D; **3.** D; **4.** B; **5.** C; **6.** B; **7.** A; **8.** C.
II. 1. a) $AM = 48$ cm, $AT = 24$ cm, $A = 576$ cm^2.
b) 75%. **2.** $COP\Delta \equiv EOQ\Delta \Rightarrow CP \equiv QE$, $PO \equiv QO$, apoi $\mathcal{K}_{CPOF} = \mathcal{K}_{EQOD}$.
3. a) $\mathcal{T}_{ABNP} = 22$ cm^2, $\mathcal{T}_{CDPN} = 18$ cm^2.
b) $\mathcal{T}_{CMP} = \mathcal{T}_{ABCD} - \mathcal{T}_{AMP} - \mathcal{T}_{BMC} - \mathcal{T}_{CDP} = 14$ cm^2.

5. A KÖR

5.1 Külső pontból húzott érintő

I. 1. *C*; 2. *D*; 3. *D*; 4. *B*; 5. *C*; 6. *B*; 7. *A*; 8. *C*.
II. 1. a) $AM = 48$ cm, $AT = 24$ cm, $A = 576$ cm^2;
b) 75%.

2. $COP\Delta = EOQ\Delta \Rightarrow CP = QE$, $PO = QO$, majd $\mathcal{K}_{CPOF} = \mathcal{K}_{EQOD}$. 3. a) $\mathcal{T}_{ABNP} = 22$ cm^2, $\mathcal{T}_{CDPN} = 18$ cm^2.
b) $\mathcal{T}_{CMP} = \mathcal{T}_{ABCD} - \mathcal{T}_{AMP} - \mathcal{T}_{BMC} - \mathcal{T}_{CDP} = 14$ cm^2.

5.2 Körbe írt szabályos sokszögek

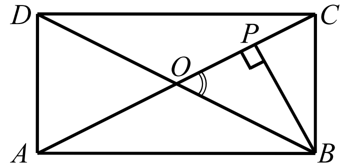
I. 1. C; **2.** A; **3.** B; **4.** D; **5.** B; **6.** D; **7.** C; **8.** B.
II. 1. b) $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = 40\pi$ cm^2; c) $\mathcal{T}_a = \dfrac{295\pi}{8}$ cm^2;
d) $l = \dfrac{29}{2}\pi$ cm.
2. $AMQ\Delta \equiv BNM\Delta \equiv CPN\Delta \equiv DQP\Delta \Rightarrow MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QM$; $NMQ\sphericalangle = 15° + 60° + 15° = 90°$. **3.** Mindegyik szög 120°;
b) $AB < BC$; nem szabályos sokszög.

6. HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGA

I. 1. b; **2.** e; **3.** c; **4.** d. **II. 1.** A; **2.** D; **3.** B; **4.** C.
III. 1. a) $BD = 4$ cm; b) $CI = CA = 6$ cm;
c) $AB = 15$ cm.
2. a) $ADE\Delta \sim PBE\Delta$ (Sz.Sz.); b) $\dfrac{EO}{BD} = \dfrac{1}{6}$;
c) $\dfrac{AE}{EP} = \dfrac{AF}{FC} = 2$.

7. METRIKUS ÖSSZEFÜGGÉSEK A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGBEN

I. 1. C; **2.**A; **3.** D; **4.** B; **5.** D; **6.** A; **7.** C; **8.** B.
II. a) lásd a mellékelt ábrát:



b) $AC = 2\,OA = 2\,OB = 20$; $AP - CP = 12$ és $AP + CP = 20$; $AP = 16$, $CP = 4$; $ABC\Delta$-ben a magasságtételből: $BP = 8$;
c) $\text{tg}POB\sphericalangle = \dfrac{PB}{PO} = \dfrac{4}{3}$.
III. a) $0{,}45 \cdot 11 \cdot 1{,}2 = 5{,}94$ km;
b) $EM = 2 \cdot 0{,}45 + \dfrac{0{,}45 \cdot \sqrt{3}}{2} < 1{,}3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0{,}45 \cdot \sqrt{3} < 0{,}8$ (I)

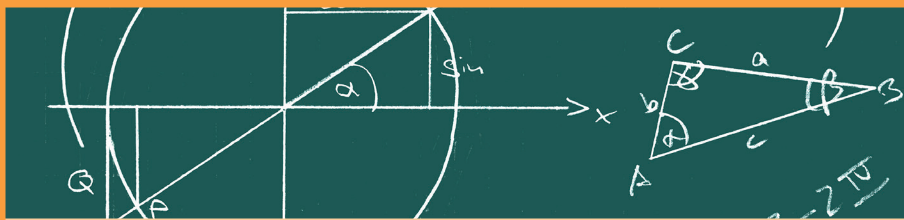
ÉV VÉGI FELMÉRŐ 1

I. 1. I; **2.** H; **3.** I; **4.** H; **5.** I; **6.** H. **II. 1.** 1–e, 2–a, 3–b, 4–c. **III. 1.** a) $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $a < b$.
2. a) $10\sqrt{13}$; b) 6.

ÉV VÉGI FELMÉRŐ 2

I. 1. B; **2.** C; **3.** A; **4.** C; **5.** B; **6.** B; **7.** B; **8.** B.
II. 1. $x = 7$, $y = 1$, $z = 1$; **2.** a) $CD = 8$ cm;
b) $\mathcal{T}_{ABCD} = 224$ cm^2; c) 2.

Programa școlară poate fi accesată la adresa:
http://programe.ise.ro.



A tankönyvnek van nyomtatott és digitális változata. A digitális változatnak hasonló tartalomjegyzéke van. Kibővítve multimédiás interaktív tanulási tevékenységekkel (interaktív gyakorlatok, nevelési játékok, animációk, filmek, szimulálások).

Tradiție din 1989
www.litera.ro
ISBN 978-606-33-4736-8
9 786063 347368